Die Collatz-Vermutung

Eric Hofmann

Habilitationsvortrag
an der Fakultät für Mathematik und Informatik
der Universität Heidelberg

14. Juli 2021

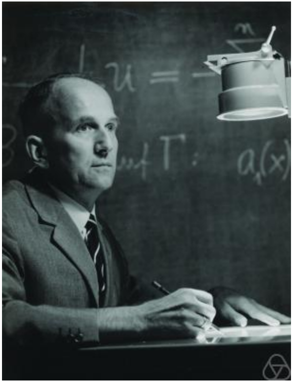


Abbildung: Lothar Collatz (1910-1990, Coyright MFO)

Eine merkwürdige Zahlenfolge

Zu einer natürlichen Zahl N als Startwert definiere man eine Zahlenfolge durch sukzessives Anwenden folgende Vorschrift:

> *„Ist N ungerade, so ist $3N + 1$ der Nachfolger von N, ist hingegen N gerade, folgt $\frac{N}{2}$ auf N.“*

Eine merkwürdige Zahlenfolge

Zu einer natürlichen Zahl N als Startwert definiere man eine Zahlenfolge durch sukzessives Anwenden folgende Vorschrift:

> *„Ist N ungerade, so ist $3N+1$ der Nachfolger von N, ist hingegen N gerade, folgt $\frac{N}{2}$ auf N.“*

Etwas formaler definieren wir die Abbildung $\mathrm{Col} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ vermöge

$$\mathrm{Col}(N) := \begin{cases} 3N+1 & N \equiv 1 \pmod 2 \\ \frac{N}{2} & N \equiv 0 \pmod 2 \end{cases}$$

Eine merkwürdige Zahlenfolge

Zu einer natürlichen Zahl N als Startwert definiere man eine Zahlenfolge durch sukzessives Anwenden folgende Vorschrift:

> *„Ist N ungerade, so ist $3N+1$ der Nachfolger von N, ist hingegen N gerade, folgt $\frac{N}{2}$ auf N."*

Etwas formaler definieren wir die Abbildung $\mathrm{Col} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ vermöge

$$\mathrm{Col}(N) := \begin{cases} 3N+1 & N \equiv 1 \pmod 2 \\ \frac{N}{2} & N \equiv 0 \pmod 2 \end{cases}$$

und setzen

$$\mathrm{Col}^0(N) = N, \mathrm{Col}^1(N) = \mathrm{Col}(N), \mathrm{Col}^2(N) = \mathrm{Col}(\mathrm{Col}(N)) \text{ usw.}.$$

Eine merkwürdige Zahlenfolge

Zu einer natürlichen Zahl N als Startwert definiere man eine Zahlenfolge durch sukzessives Anwenden folgende Vorschrift:

> *„Ist N ungerade, so ist $3N+1$ der Nachfolger von N, ist hingegen N gerade, folgt $\frac{N}{2}$ auf N."*

Etwas formaler definieren wir die Abbildung $\mathrm{Col} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ vermöge

$$\mathrm{Col}(N) := \begin{cases} 3N+1 & N \equiv 1 \pmod 2 \\ \frac{N}{2} & N \equiv 0 \pmod 2 \end{cases}$$

und setzen

$$\mathrm{Col}^0(N) = N, \mathrm{Col}^1(N) = \mathrm{Col}(N), \mathrm{Col}^2(N) = \mathrm{Col}(\mathrm{Col}(N)) \text{ usw..}$$

Dann ist $(\mathrm{Col}^n(N))_{n \in \mathbb{N}_0} = \mathrm{Col}^{\mathbb{N}_0}(N)$ die *Collatz-Folge* mit Startwert N (auch *Collatz-Bahn* von N).

Erste Beispiele

- Sei zunächst $N = 1$. Man erhält die Folgenglieder $1, 4, 2, 1, \ldots$.

Erste Beispiele

- Sei zunächst $N = 1$. Man erhält die Folgenglieder $1, 4, 2, 1, \ldots$. Offensichtlich setzt sich die Folge nun periodisch fort.

Erste Beispiele

- Sei zunächst $N = 1$. Man erhält die Folgenglieder $1, 4, 2, 1, \dots$. Offensichtlich setzt sich die Folge nun periodisch fort.
- Für $N = 3$ erhält man $3, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, \dots,$

Erste Beispiele

- Sei zunächst $N = 1$. Man erhält die Folgenglieder $1, 4, 2, 1, \ldots$. Offensichtlich setzt sich die Folge nun periodisch fort.
- Für $N = 3$ erhält man $3, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, \ldots$, und stößt wieder auf die gleiche Periode.

Erste Beispiele

- Sei zunächst $N = 1$. Man erhält die Folgenglieder $1, 4, 2, 1, \ldots$. Offensichtlich setzt sich die Folge nun periodisch fort.
- Für $N = 3$ erhält man $3, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, \ldots$, und stößt wieder auf die gleiche Periode.
- Nun zu $N = 7$: $7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1$. Nach 16 Schritten ist man wieder bei der 1 angelangt.

Erste Beispiele

- Sei zunächst $N = 1$. Man erhält die Folgenglieder $1, 4, 2, 1, \dots$. Offensichtlich setzt sich die Folge nun periodisch fort.
- Für $N = 3$ erhält man $3, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, \dots$, und stößt wieder auf die gleiche Periode.
- Nun zu $N = 7$: $7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1$. Nach 16 Schritten ist man wieder bei der 1 angelangt.

Beobachtungen

- Es scheint, dass die Bahn für jedes N irgendwann wieder in der Periode $4, 2, 1, \dots$ mündet.

Erste Beispiele

- Sei zunächst $N = 1$. Man erhält die Folgenglieder $1, 4, 2, 1, \dots$. Offensichtlich setzt sich die Folge nun periodisch fort.
- Für $N = 3$ erhält man $3, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, \dots$, und stößt wieder auf die gleiche Periode.
- Nun zu $N = 7$: $7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1$. Nach 16 Schritten ist man wieder bei der 1 angelangt.

Beobachtungen

- Es scheint, dass die Bahn für jedes N irgendwann wieder in der Periode $4, 2, 1, \dots$ mündet.
- Die hierfür benötigte Zahlen an Schritten variiert allerdings stark, lediglich für 2er Potenzen $N = 2^k$ ist sie offensichtlich gleich k.

Erste Beispiele

- Sei zunächst $N = 1$. Man erhält die Folgenglieder $1, 4, 2, 1, \ldots$. Offensichtlich setzt sich die Folge nun periodisch fort.
- Für $N = 3$ erhält man $3, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, \ldots$, und stößt wieder auf die gleiche Periode.
- Nun zu $N = 7$: $7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1$. Nach 16 Schritten ist man wieder bei der 1 angelangt.

Beobachtungen

- Es scheint, dass die Bahn für jedes N irgendwann wieder in der Periode $4, 2, 1, \ldots$ mündet.
- Die hierfür benötigte Zahlen an Schritten variiert allerdings stark, lediglich für 2er Potenzen $N = 2^k$ ist sie offensichtlich gleich k.
- Die Folgen verhalten sich teils recht erratisch, was das Auf und Ab und den höchsten erreichten Wert betrifft.

Die Vermutung von Collatz

Collatz gelangte 1937 zu folgender Vermutung, die unter anderem durch Hasse, Ulam und Kakutani weiter verbreitet wurde.

Die Vermutung von Collatz

Collatz gelangte 1937 zu folgender Vermutung, die unter anderem durch Hasse, Ulam und Kakutani weiter verbreitet wurde.

Collatz-Vermutung

- Für $N \in \mathbb{N}$ setze man $\mathrm{Col}_{min}(N) := \min_{n \in \mathbb{N}_0} \mathrm{Col}^n(N)$.

Die Vermutung von Collatz

Collatz gelangte 1937 zu folgender Vermutung, die unter anderem durch Hasse, Ulam und Kakutani weiter verbreitet wurde.

Collatz-Vermutung

- Für $N \in \mathbb{N}$ setze man $\mathrm{Col}_{min}(N) := \min_{n \in \mathbb{N}_0} \mathrm{Col}^n(N)$.
- Dann gilt

$$\mathrm{Col}_{min}(N) = 1$$

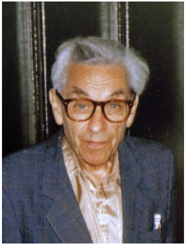
  für jede natürliche Zahl N.

Mit anderen Worten: Alle Collatz-Bahnen werden irgendwann periodisch, dabei ist jedoch $1, 4, 2$ die *einzige* auftretende Periode.

Meinungen zur Collatz Vermutung

„Mathematics may not be ready for such problems.“– Paul Erdős (1983)

„Hopeless. Absolutely hopeless. “

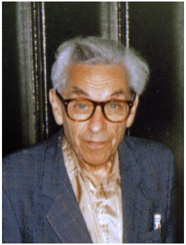


Paul Erdős (1913-1996) Quelle: Wikipedia, Author: Kmhkmh

Meinungen zur Collatz Vermutung

„Mathematics may not be ready for such problems.“– Paul Erdős (1983)

„Hopeless. Absolutely hopeless. “



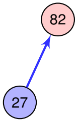
Paul Erdős (1913-1996) Quelle: Wikipedia, Author: Kmhkmh

„Don't try to solve these problems!“– Richard K. Guy

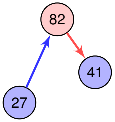
„ [This] is an extraordinarily difficult problem, completely out of reach of present day mathematics.“– Jeffrey Lagarias

Beispiel $N = 27$ (Logarithmische Einheiten)

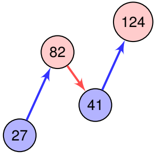
Beispiel $N = 27$ (Logarithmische Einheiten)



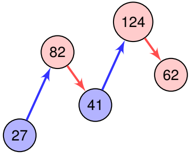
Beispiel $N = 27$ (Logarithmische Einheiten)



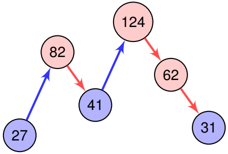
Beispiel $N = 27$ (Logarithmische Einheiten)



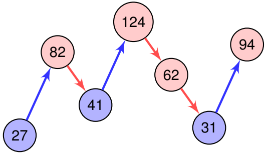
Beispiel $N = 27$ (Logarithmische Einheiten)



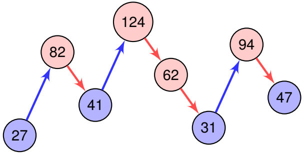
Beispiel $N = 27$ (Logarithmische Einheiten)



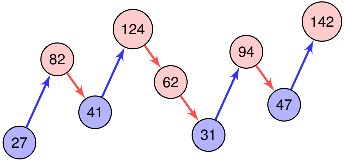
Beispiel $N = 27$ (Logarithmische Einheiten)



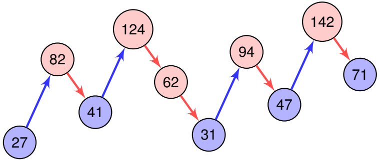
Beispiel $N = 27$ (Logarithmische Einheiten)



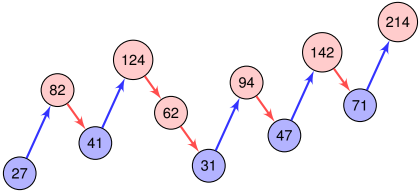
Beispiel $N = 27$ (Logarithmische Einheiten)



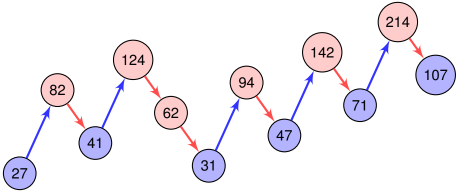
Beispiel $N = 27$ (Logarithmische Einheiten)



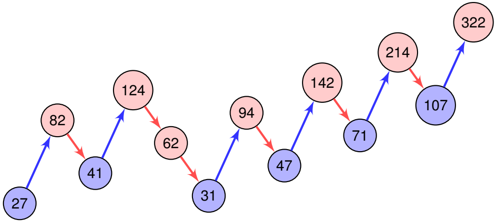
Beispiel $N = 27$ (Logarithmische Einheiten)



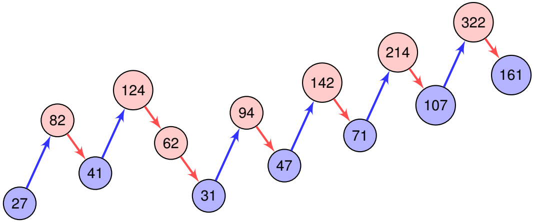
Beispiel $N = 27$ (Logarithmische Einheiten)



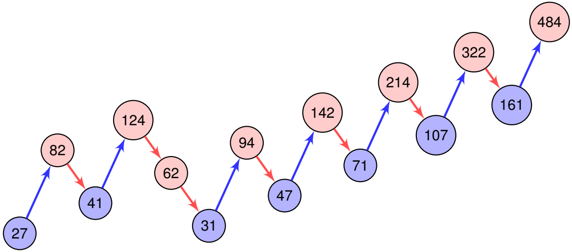
Beispiel $N = 27$ (Logarithmische Einheiten)



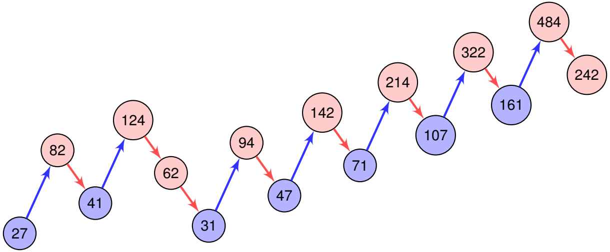
Beispiel $N = 27$ (Logarithmische Einheiten)



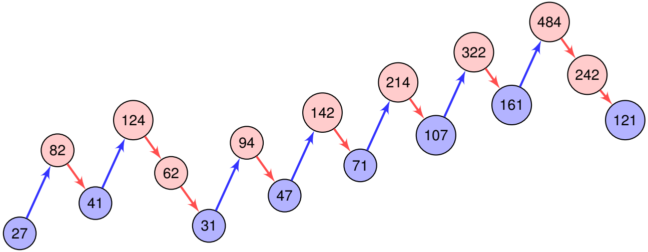
Beispiel $N = 27$ (Logarithmische Einheiten)



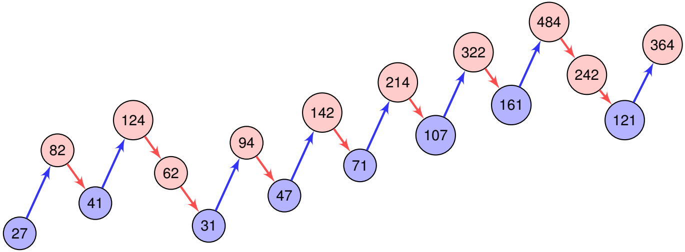
Beispiel $N = 27$ (Logarithmische Einheiten)



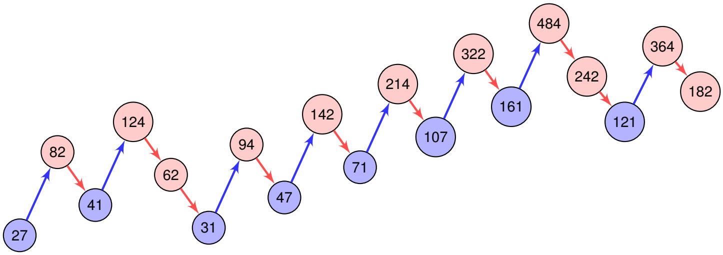
Beispiel $N = 27$ (Logarithmische Einheiten)



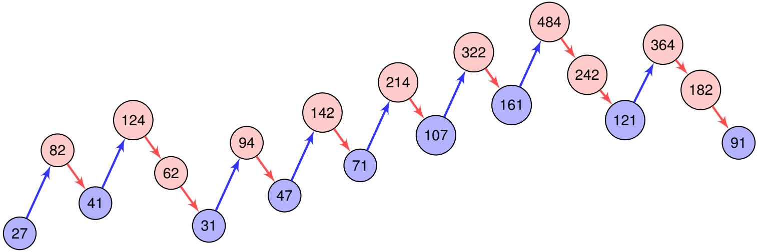
Beispiel $N = 27$ (Logarithmische Einheiten)



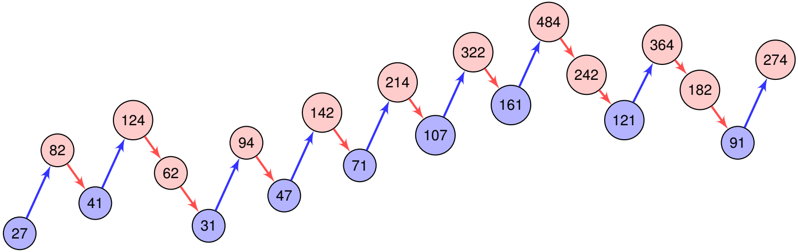
Beispiel $N = 27$ (Logarithmische Einheiten)



Beispiel $N = 27$ (Logarithmische Einheiten)



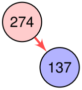
Beispiel $N = 27$ (Logarithmische Einheiten)



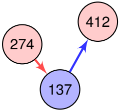
$N = 27$ – 2

274

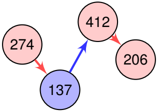
$N = 27$ – 2



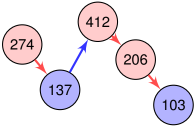
$N = 27$ -2



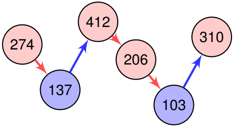
$N = 27$ -2



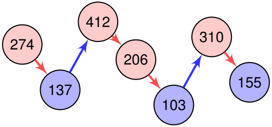
$N = 27$ – 2



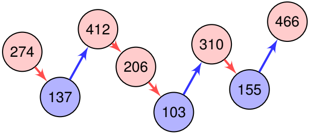
$N = 27$ – 2



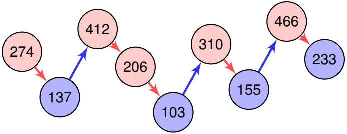
$N = 27$ – 2



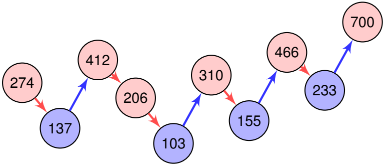
$N = 27$ -2



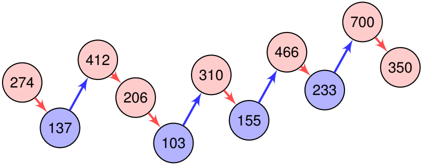
$N = 27$ – 2



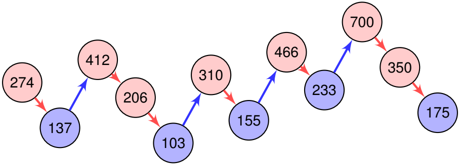
$N = 27$ – 2



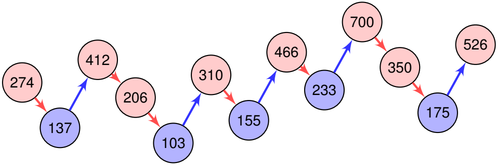
$N = 27$ – 2



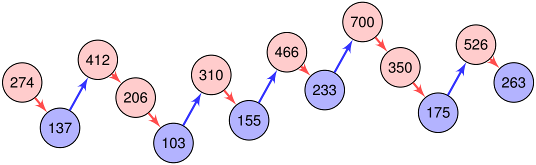
$N = 27$ – 2



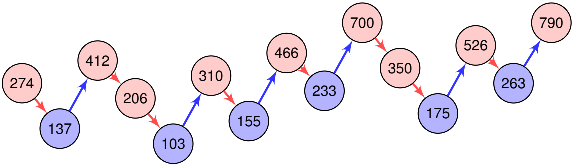
$N = 27$ – 2



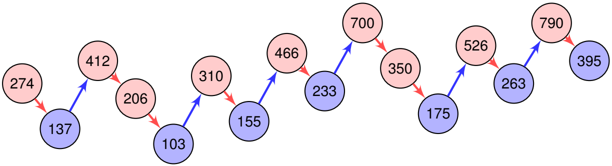
$N = 27$ – 2



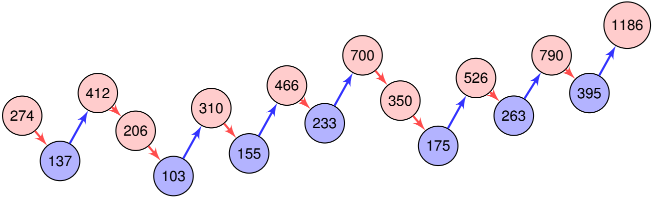
$N = 27$ – 2



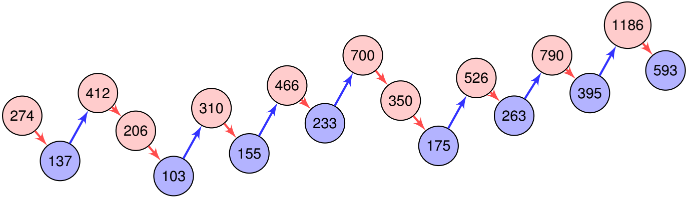
$N = 27$ -2



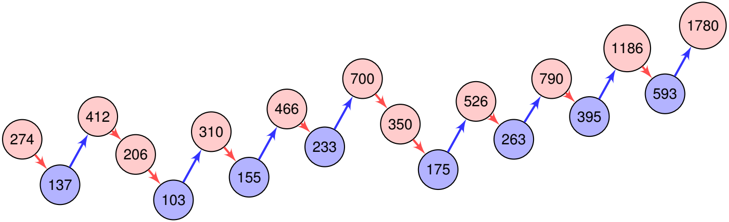
$N = 27$ -2


274
137
412
206
103
310
155
466
233
700
350
175
526
263
790
395
1186

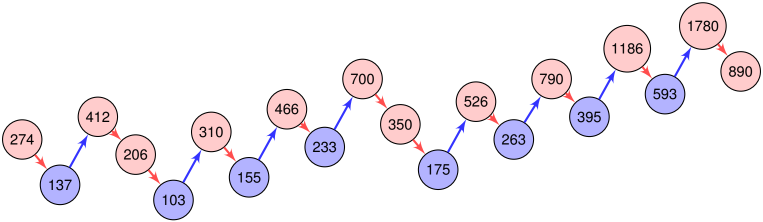
$N = 27$ – 2


274
137
412
206
103
310
155
466
233
700
350
175
526
263
790
395
1186
593

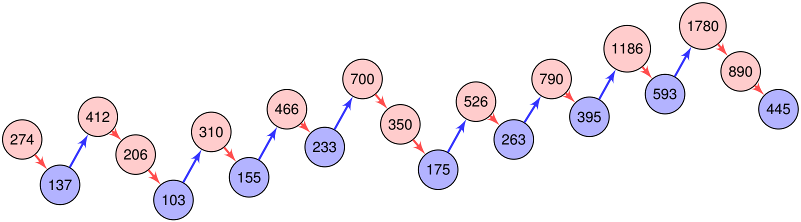
$N = 27$ ₋₂


274
137
412
206
103
310
155
466
233
700
350
175
526
263
790
395
1186
593
1780

$N = 27$ -2

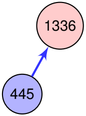

274
137
412
206
103
310
155
466
233
700
350
175
526
263
790
395
1186
593
1780
890

$N = 27$ -2

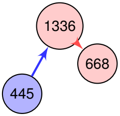

274
137
412
206
103
310
155
466
233
700
350
175
526
263
790
395
1186
593
1780
890
445

$N = 27$ – 3

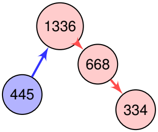
$N = 27$ – 3



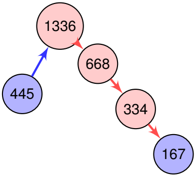
$N = 27$ – 3



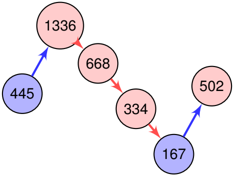
$N = 27$ – 3



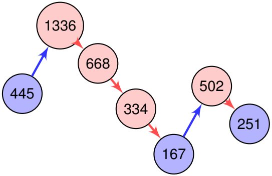
$N = 27$ – 3



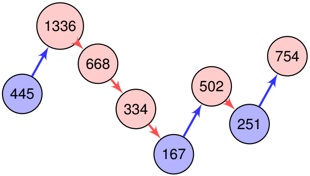
$N = 27$ -3



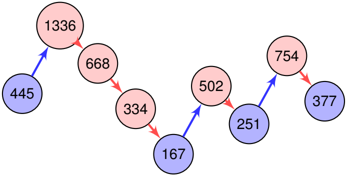
$N = 27$ – 3



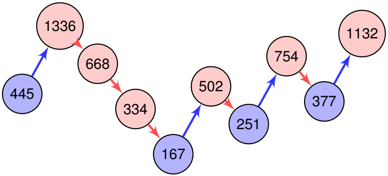
$N = 27$ – 3



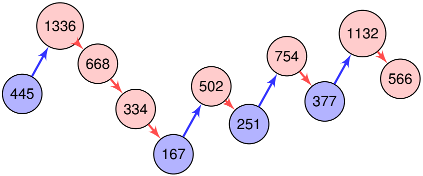
$N = 27$ – 3



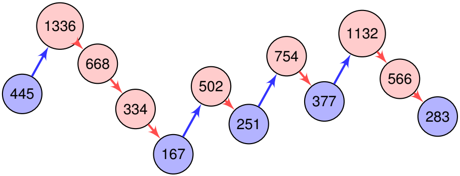
$N = 27$ – 3



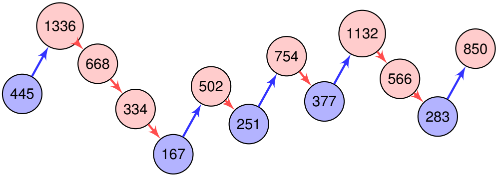
$N = 27$ – 3



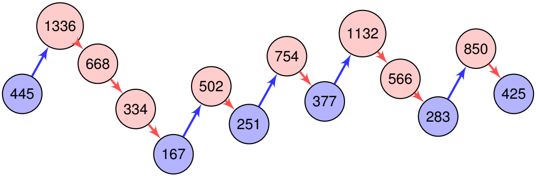
$N = 27$ - 3



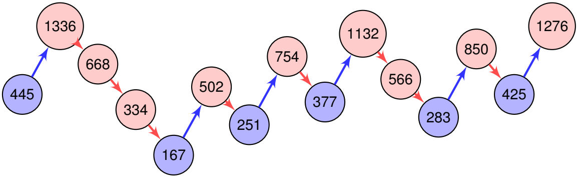
$N = 27$ – 3



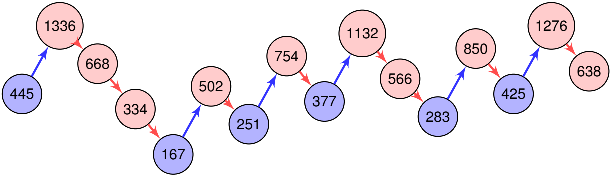
$N = 27$ – 3



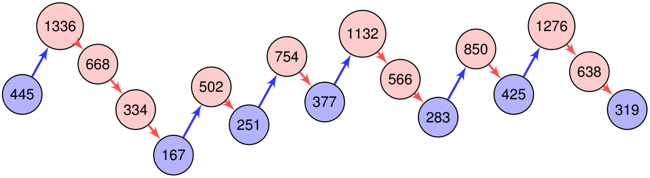
$N = 27$ - 3



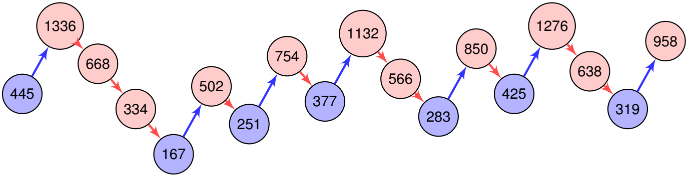
$N = 27$ - 3


445
1336
668
334
167
502
251
754
377
1132
566
283
850
425
1276
638

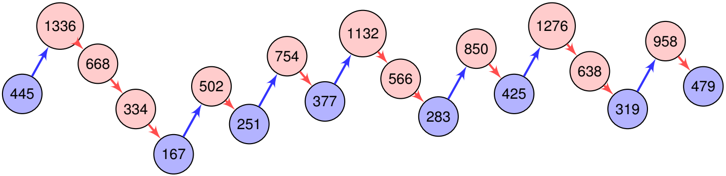
$N = 27$ – 3


445
1336
668
334
167
502
251
754
377
1132
566
283
850
425
1276
638
319

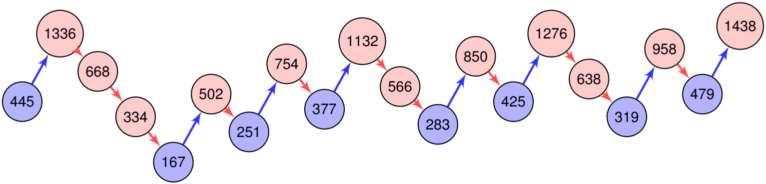
$N = 27$ – 3


1336
668
445
334
167
502
251
754
377
1132
566
283
850
425
1276
638
319
958

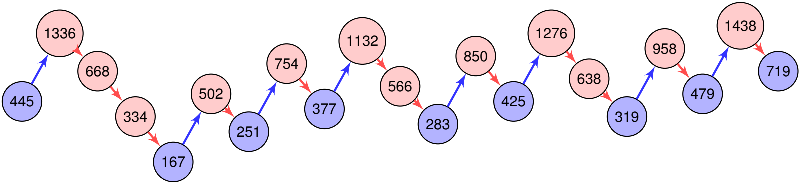
$N = 27$ – 3


445
1336
668
334
167
502
251
754
377
1132
566
283
850
425
1276
638
319
958
479

$N = 27$ – 3

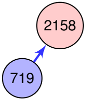

445
1336
668
334
167
502
251
754
377
1132
566
283
850
425
1276
638
319
958
479
1438

$N = 27$ - 3

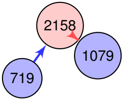

445
1336
668
334
167
502
251
754
377
1132
566
283
850
425
1276
638
319
958
479
1438
719

$N = 27$ – 4

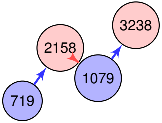
$N = 27$ – 4



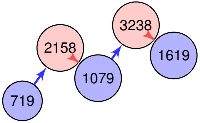
$N = 27$ – 4



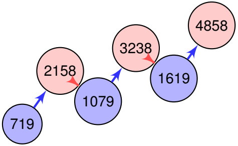
$N = 27$ – 4



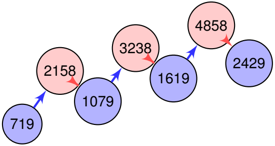
$N = 27$ $_{-4}$



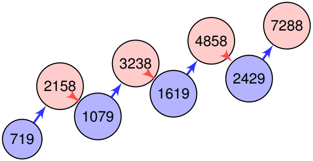
$N = 27$ – 4



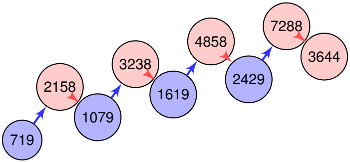
$N = 27$ – 4



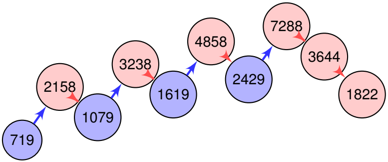
$N = 27$ – 4



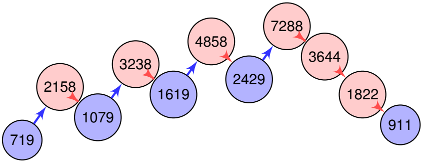
$N = 27$ – 4



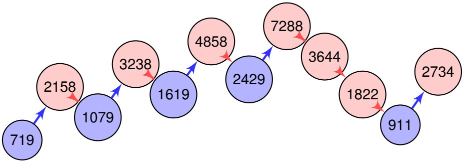
$N = 27$ – 4



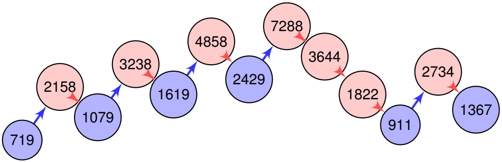
$N = 27$ – 4



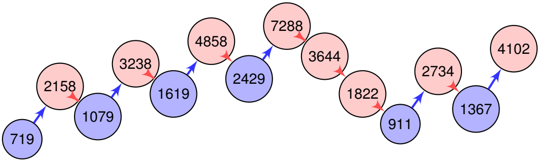
$N = 27_{-4}$



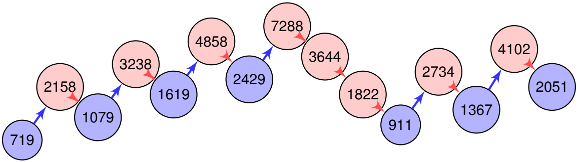
$N = 27$ – 4


719
2158
1079
3238
1619
4858
2429
7288
3644
1822
911
2734
1367

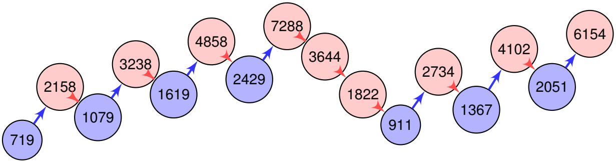
$N = 27$ – 4


719
2158
1079
3238
1619
4858
2429
7288
3644
1822
911
2734
1367
4102

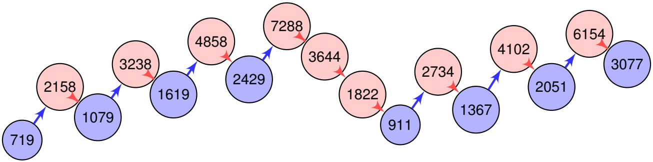
$N = 27$ – 4


719
2158
1079
3238
1619
4858
2429
7288
3644
1822
911
2734
1367
4102
2051

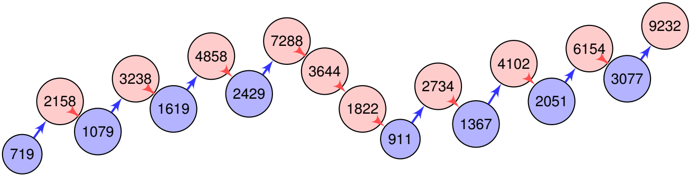
$N = 27$ – 4


719
2158
1079
3238
1619
4858
2429
7288
3644
1822
911
2734
1367
4102
2051
6154

$N = 27$ – 4

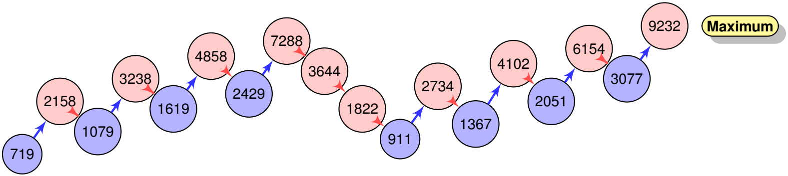

719
2158
1079
3238
1619
4858
2429
7288
3644
1822
911
2734
1367
4102
2051
6154
3077

$N = 27$ – 4

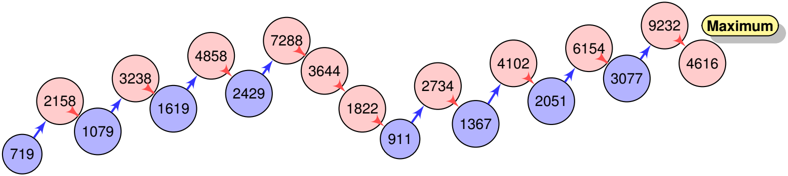


719
2158
1079
3238
1619
4858
2429
7288
3644
1822
911
2734
1367
4102
2051
6154
3077
9232

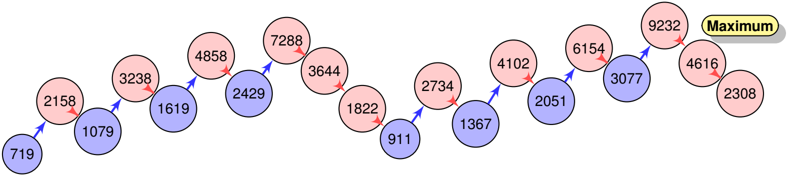
$N = 27$ – 4


719
2158
1079
3238
1619
4858
2429
7288
3644
1822
911
2734
1367
4102
2051
6154
3077
9232
Maximum

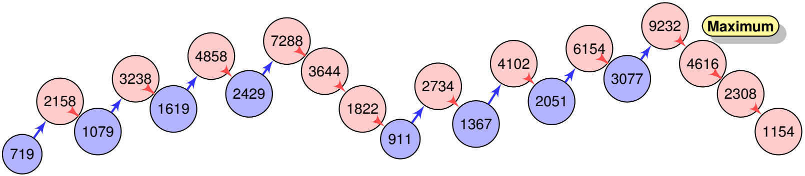
$N = 27$ – 4


719
2158
1079
3238
1619
4858
2429
7288
3644
1822
911
2734
1367
4102
2051
6154
3077
9232
4616
Maximum

$N = 27$ – 4

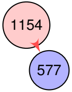

719
2158
1079
3238
1619
4858
2429
7288
3644
1822
911
2734
1367
4102
2051
6154
3077
9232
Maximum
4616
2308

$N = 27$ – 4

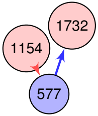

719
2158
1079
3238
1619
4858
2429
7288
3644
1822
911
2734
1367
4102
2051
6154
3077
9232
Maximum
4616
2308
1154

$N = 27$ – 5

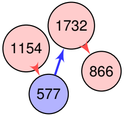
$N = 27$ – 5



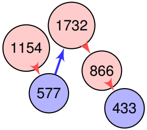
$N = 27$ – 5



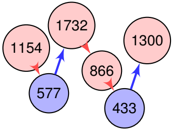
$N = 27$ – 5



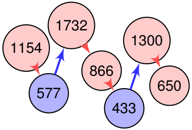
$N = 27$ – 5



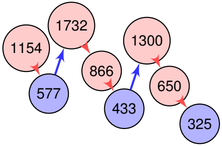
$N = 27$ – 5



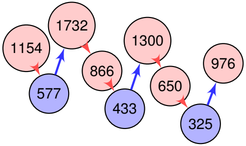
$N = 27_{-5}$



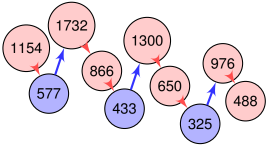
$N = 27$ – 5



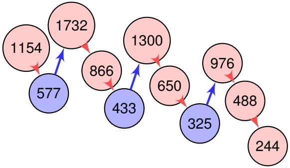
$N = 27$ – 5



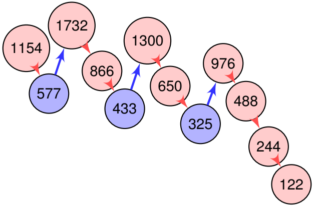
$N = 27$ – 5



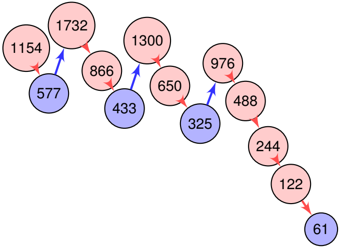
$N = 27$ – 5



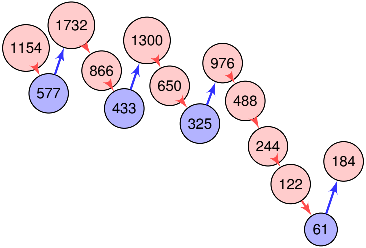
$N = 27$ – 5



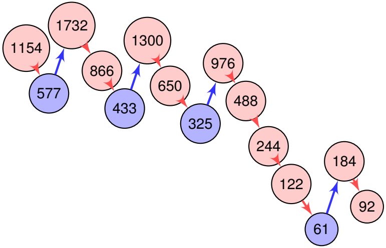
$N = 27$ – 5



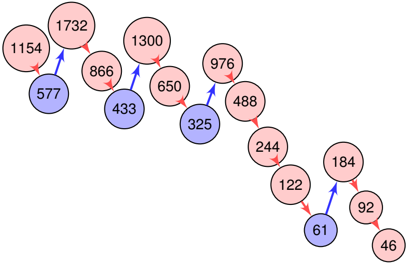
$N = 27$ – 5



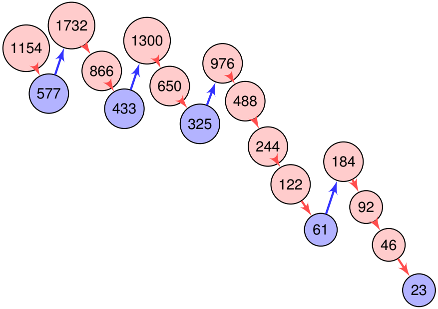
$N = 27$ $_{-5}$



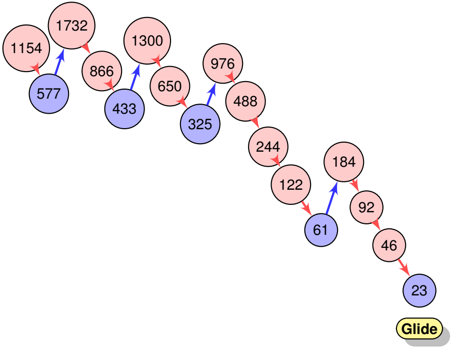
$N = 27$ – 5



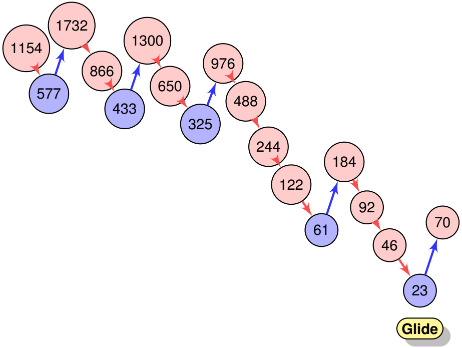
$N = 27$ – 5


1154
1732
577
866
1300
433
650
976
325
488
244
184
122
92
61
46
23

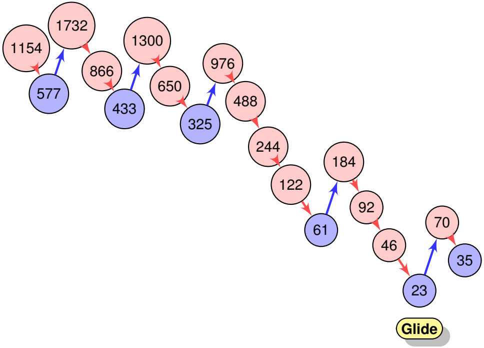
$N = 27$ – 5


1154
1732
866
1300
650
976
488
577
433
325
244
122
61
184
92
46
23
Glide

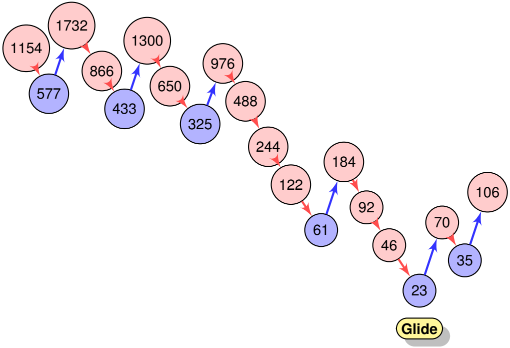
$N = 27$ – 5


1154
1732
866
1300
650
976
488
577
433
325
244
184
122
92
61
46
70
23
Glide

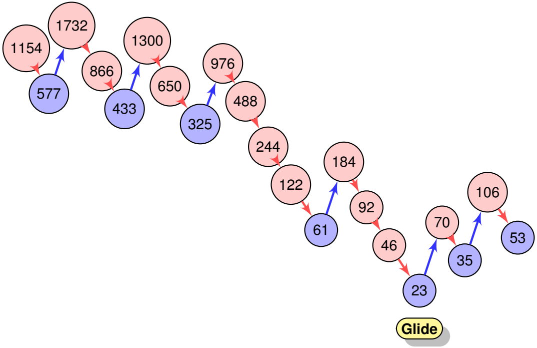
$N = 27$ – 5


1154
1732
577
866
1300
433
650
976
325
488
244
184
122
61
92
70
46
35
23
Glide

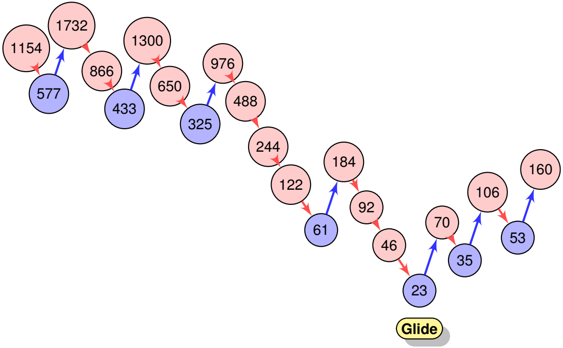
$N = 27$ – 5


1154
1732
866
1300
650
976
488
577
433
325
244
122
184
92
61
46
70
106
35
23
Glide

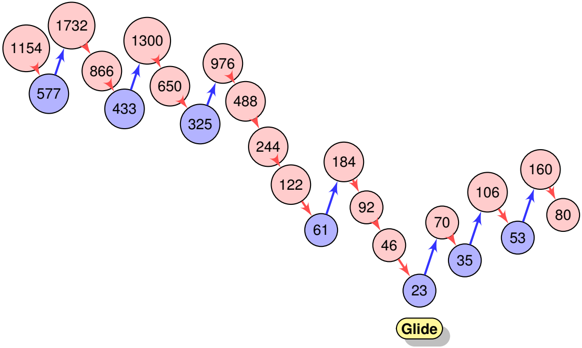
$N = 27$ – 5


1154
1732
577
866
1300
433
650
976
325
488
244
184
122
92
61
106
70
46
53
35
23
Glide

$N = 27$ – 5

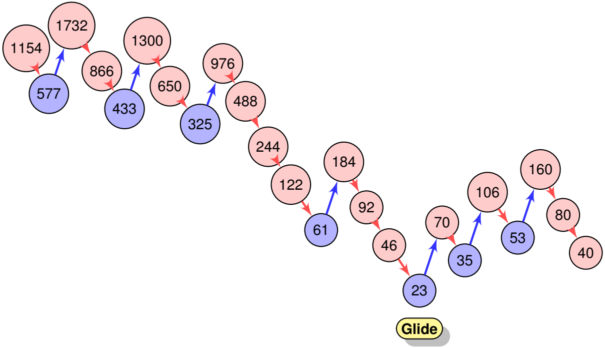

1154
1732
866
1300
577
433
650
976
325
488
244
184
122
61
92
160
106
70
46
53
35
23
Glide

$N = 27$ – 5

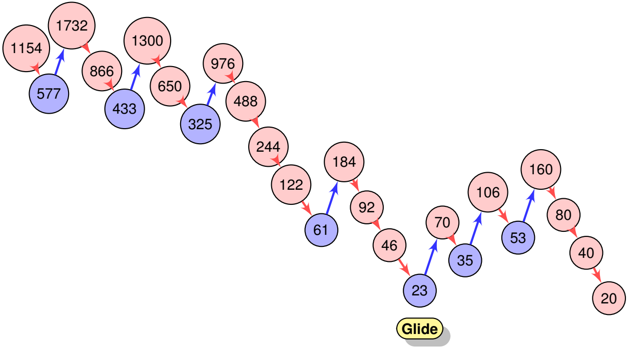


1154
1732
866
1300
577
433
650
976
488
325
244
184
122
92
61
46
160
106
70
53
80
35
23
Glide

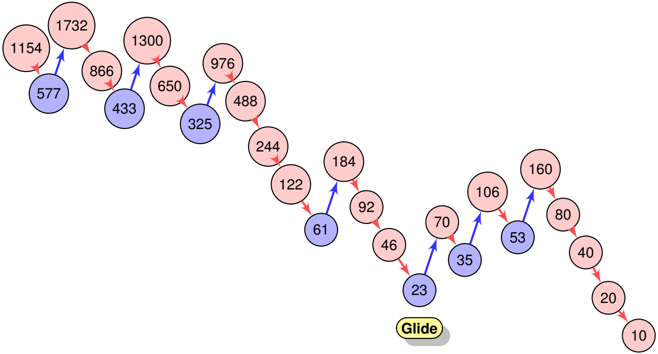
$N = 27$ – 5


1154
1732
577
866
1300
433
650
976
325
488
244
184
122
92
61
46
70
106
160
35
53
80
40
23
Glide

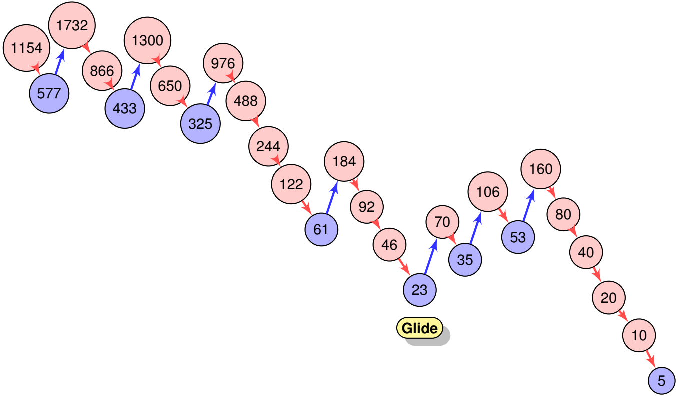
$N = 27$ – 5


1154
1732
577
866
1300
433
650
976
325
488
244
184
122
92
61
46
70
106
160
35
53
80
23
40
20
Glide

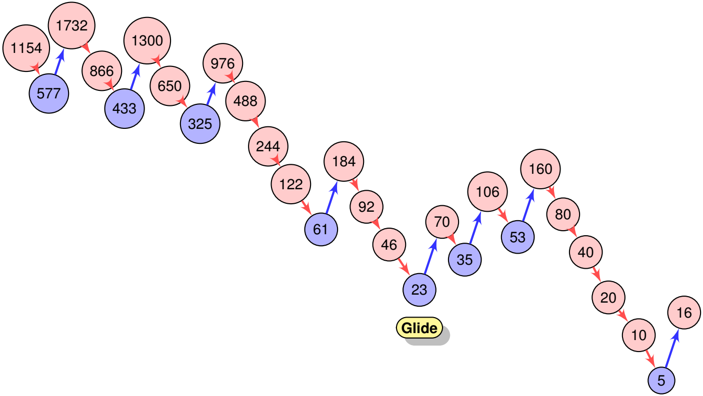
$N = 27$ – 5


1154
1732
577
866
1300
433
650
976
325
488
244
184
122
92
61
46
70
106
160
35
53
80
23
40
Glide
20
10

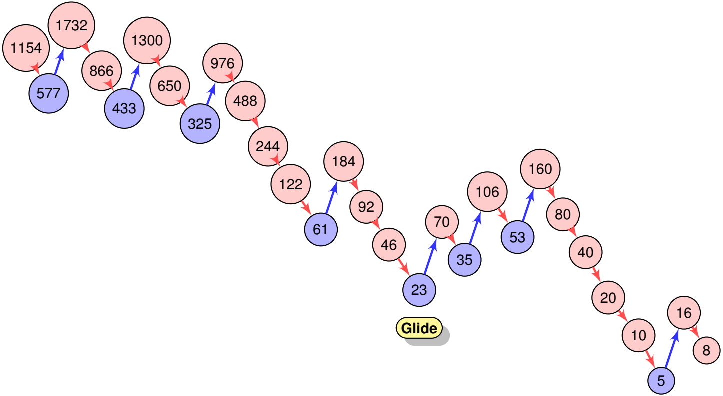
$N = 27$ $_{-5}$


1154
1732
577
866
1300
433
650
976
325
488
244
184
122
92
61
46
70
106
160
23
35
53
80
Glide
40
20
10
5

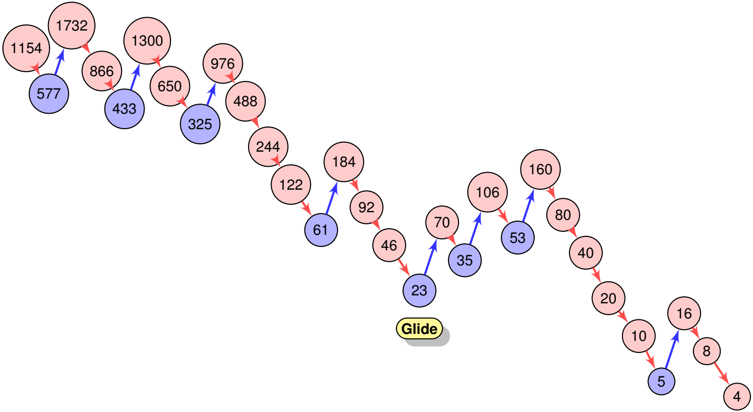
$N = 27$ – 5


1154
1732
577
866
1300
433
650
976
325
488
244
184
122
61
92
46
70
106
160
23
35
53
80
40
Glide
20
10
16
5

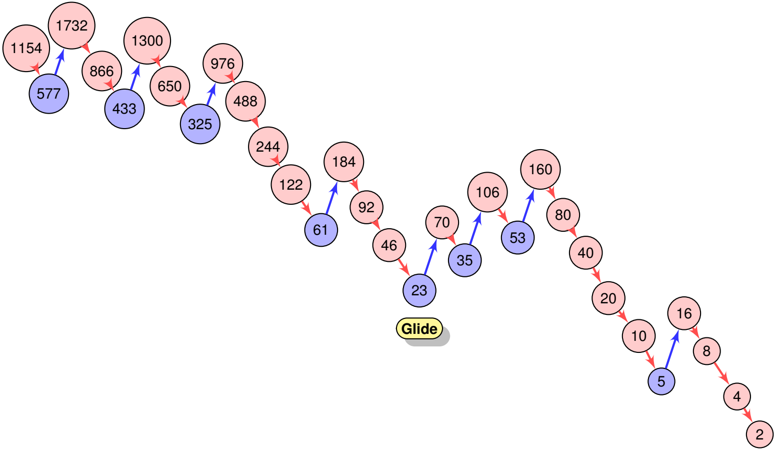
$N = 27$ – 5


1154
1732
577
866
1300
433
650
976
325
488
244
184
122
61
92
46
70
106
160
23
35
53
80
40
Glide
20
16
10
8
5

$N = 27$ – 5

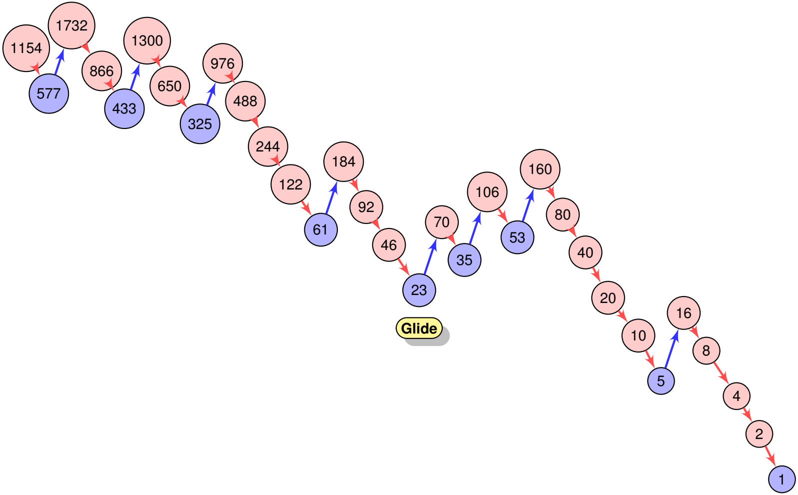

1154
1732
577
866
1300
433
650
976
325
488
244
184
122
92
61
46
70
23
35
106
53
160
80
40
20
16
10
8
5
4
Glide

$N = 27$ – 5

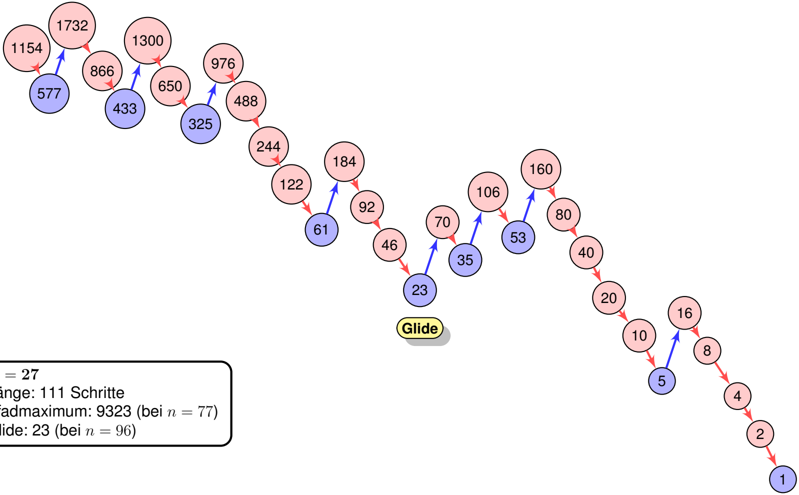


1154
1732
577
866
1300
433
650
976
325
488
244
122
184
61
92
46
70
23
Glide
35
106
53
160
80
40
20
10
16
5
8
4
2

$N = 27$ – 5


1154
1732
577
866
1300
433
650
976
325
488
244
184
122
61
92
46
70
23
35
106
53
160
80
40
20
Glide
16
10
5
8
4
2
1

$N = 27$ – 5



$\mathrm{N} = \mathbf{27}$
Länge: 111 Schritte
Pfadmaximum: 9323 (bei $n = 77$)
Glide: 23 (bei $n = 96$)

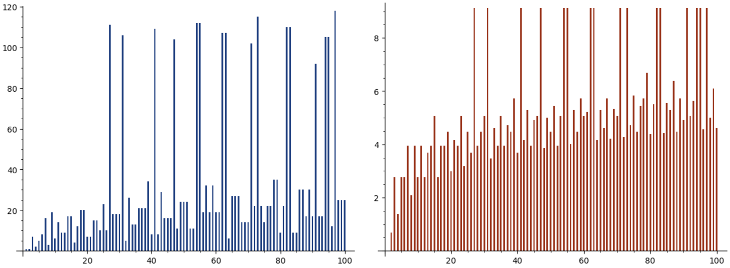


Abbildung: Pfadlängen und -maxima für $1 \leq N \leq 100$

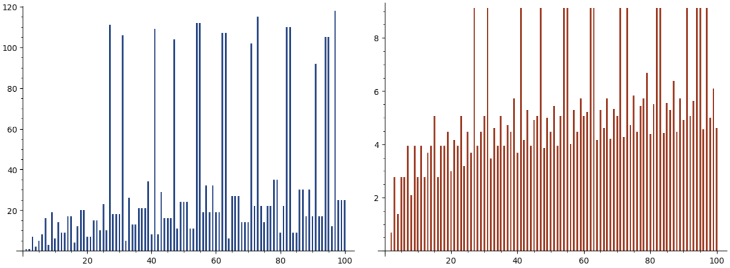
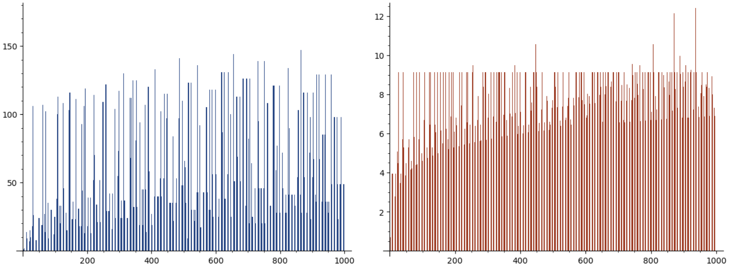


Abbildung: Pfadlängen und -maxima für $1 \leq N \leq 100$ und ≤ 1000



Querbeziehungen

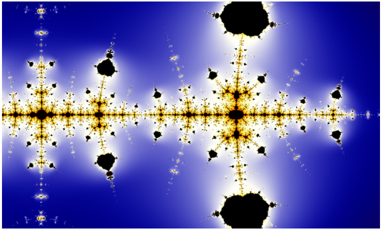
Das Collatz-Problem fasziniert durch sein scheinbare „Einfachkeit"(leicht zu formulieren) einerseits und seine enorme Schwierigkeit andererseits.

Querbeziehungen

Das Collatz-Problem fasziniert durch sein scheinbare „Einfachkeit“ (leicht zu formulieren) einerseits und seine enorme Schwierigkeit andererseits.

Darüber hinaus bestehen Verbindungen zu vielen weiteren Gebieten der Mathematik und verwandter Disziplinen:

- Zahlentheorie
- Dynamische Systeme (Nicht-lineare Dynamik)
- Random Scattering-Matrizen
- Ergodentheorie
- Logik
- Theoretische Informatik



Collatz-Fraktal, Quelle: Wikipedia, Author: Pokipsy76

Ein heuristisches Argument

Auf der Untersuchung der Parität basiert folgende heuristische Überlegung zu Konvergenz der Collatz-Folgen (vgl. Lagarias):

Ein heuristisches Argument

Auf der Untersuchung der Parität basiert folgende heuristische Überlegung zu Konvergenz der Collatz-Folgen (vgl. Lagarias):

- Wir führen eine *Beschleunigung* $T(N)$ der Collatz-Folge ein, bei der in jedem Iterationsschritt halbiert wird:

$$T(N) := \begin{cases} \frac{3N+1}{2} & N \text{ ungerade} \\ \frac{N}{2} & N \text{ gerade.} \end{cases}$$

Ein heuristisches Argument

Auf der Untersuchung der Parität basiert folgende heuristische Überlegung zu Konvergenz der Collatz-Folgen (vgl. Lagarias):

- Wir führen eine *Beschleunigung* $T(N)$ der Collatz-Folge ein, bei der in jedem Iterationsschritt halbiert wird:

$$T(N) := \begin{cases} \frac{3N+1}{2} & N \text{ ungerade} \\ \frac{N}{2} & N \text{ gerade.} \end{cases}$$

- Sei nun N eine zufällige natürliche Zahl. Die Wahrscheinlichkeit, dass N gerade bzw. ungerade ist, beträgt je $\frac{1}{2}$.

Ein heuristisches Argument

Auf der Untersuchung der Parität basiert folgende heuristische Überlegung zu Konvergenz der Collatz-Folgen (vgl. Lagarias):

- Wir führen eine *Beschleunigung* $T(N)$ der Collatz-Folge ein, bei der in jedem Iterationsschritt halbiert wird:

$$T(N) := \begin{cases} \frac{3N+1}{2} & N \text{ ungerade} \\ \frac{N}{2} & N \text{ gerade.} \end{cases}$$

- Sei nun N eine zufällige natürliche Zahl. Die Wahrscheinlichkeit, dass N gerade bzw. ungerade ist, beträgt je $\frac{1}{2}$.
- Genauer ist $N \equiv 0, 1, 2, 3 \pmod 4$ je mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$.

Ein heuristisches Argument

- Die (bedingte) Wahrscheinlichkeit p, dass $T(N)$ gerade/ungerade ist, ergibt sich nun folgendermaßen:

Ein heuristisches Argument

- Die (bedingte) Wahrscheinlichkeit p, dass $T(N)$ gerade/ungerade ist, ergibt sich nun folgendermaßen:

N	0	1	2	3	$\pmod 4$

Ein heuristisches Argument

- Die (bedingte) Wahrscheinlichkeit p, dass $T(N)$ gerade/ungerade ist, ergibt sich nun folgendermaßen:

N	0	1	2	3	$\pmod 4$
$T(N)$	0	0	1	1	$\pmod 2$

Ein heuristisches Argument

- Die (bedingte) Wahrscheinlichkeit p, dass $T(N)$ gerade/ungerade ist, ergibt sich nun folgendermaßen:

N	0	1	2	3	$\pmod 4$
$T(N)$	0	0	1	1	$\pmod 2$
p	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	

Ein heuristisches Argument

- Die (bedingte) Wahrscheinlichkeit p, dass $T(N)$ gerade/ungerade ist, ergibt sich nun folgendermaßen:

N	0	1	2	3	$\pmod 4$
$T(N)$	0	0	1	1	$\pmod 2$
p	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	

Also

$$p\,(\text{„}T(N)\text{ gerade/ungerade“}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Ein heuristisches Argument

- Die (bedingte) Wahrscheinlichkeit p, dass $T(N)$ gerade/ungerade ist, ergibt sich nun folgendermaßen:

N	0	1	2	3	$\pmod 4$
$T(N)$	0	0	1	1	$\pmod 2$
p	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	

  Also
$$p\,(\text{„}T(N)\text{ gerade/ungerade“}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

- Diese Wahrscheinlichkeitsverteilung ist identisch mit der für N!

Ein heuristisches Argument

- Die (bedingte) Wahrscheinlichkeit p, dass $T(N)$ gerade/ungerade ist, ergibt sich nun folgendermaßen:

N	0	1	2	3	$\pmod 4$
$T(N)$	0	0	1	1	$\pmod 2$
p	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	

  Also
$$p\,(\text{„}T(N)\text{ gerade/ungerade“}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$
- Diese Wahrscheinlichkeitsverteilung ist identisch mit der für N!
- Idee: Betrachte die $T^k(N)$, $k = 1, 2, \ldots$ als *unabhängige, identisch verteilte* Zufallsgrößen und modelliere die Folge $(\log(T^k(N)))_{k\in\mathbb{N}_0}$ als ‘random walk’.

Ein heuristisches Argument

- Die Schrittlängen betragen dabei (näherungsweise) $\log \frac{3}{2}$ und $\log \frac{1}{2}$, beide jeweils mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$.

Ein heuristisches Argument

- Die Schrittlängen betragen dabei (näherungsweise) $\log \frac{3}{2}$ und $\log \frac{1}{2}$, beide jeweils mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$.

$$\boxed{\log N}$$

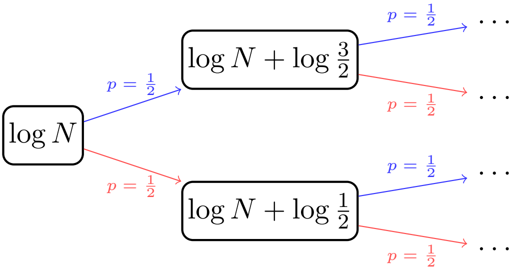
Ein heuristisches Argument

- Die Schrittlängen betragen dabei (näherungsweise) $\log \frac{3}{2}$ und $\log \frac{1}{2}$, beide jeweils mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$.

$$
\begin{tikzcd}
 & \boxed{\log N + \log \frac{3}{2}} \\
\boxed{\log N} \arrow[ur, "p = \frac{1}{2}"] \arrow[dr, "p = \frac{1}{2}"'] & \\
 & \boxed{\log N + \log \frac{1}{2}}
\end{tikzcd}
$$

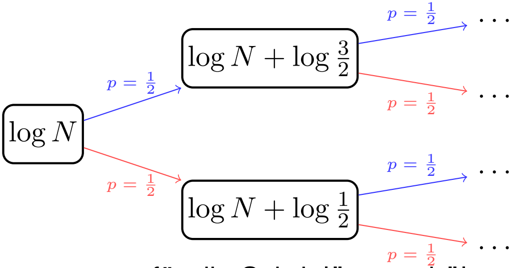
Ein heuristisches Argument

- Die Schrittlängen betragen dabei (näherungsweise) $\log \frac{3}{2}$ und $\log \frac{1}{2}$, beide jeweils mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$.



Ein heuristisches Argument

- Die Schrittlängen betragen dabei (näherungsweise) $\log \frac{3}{2}$ und $\log \frac{1}{2}$, beide jeweils mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$.

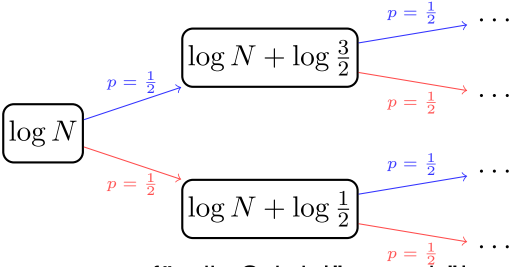


- Als Erwartungswert für die Schrittlänge erhält man

$$\frac{1}{2} \log \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \log \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \log \frac{3}{4} < 0.$$

Ein heuristisches Argument

- Die Schrittlängen betragen dabei (näherungsweise) $\log\frac{3}{2}$ und $\log\frac{1}{2}$, beide jeweils mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$.



- Als Erwartungswert für die Schrittlänge erhält man

$$\frac{1}{2}\log\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\log\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\log\frac{3}{4} < 0.$$

- Also sollte die Folge $T(N), T^2(N), T^3(N), \ldots$ ‘fast sicher’ gegen den Wert 1 konvergieren.

Belege für die Collatz-Vermutung

Computationelle Resultate

- Gilt für alle $N \leq 10^{20}$ (`yoyo@home` project, 2017)

Belege für die Collatz-Vermutung

Computationelle Resultate

- Gilt für alle $N \leq 10^{20}$ (`yoyo@home` project, 2017)
- David Bařina (2020): $N \leq 2^{68} \sim 2.95 \cdot 10^{20}$

Belege für die Collatz-Vermutung

Computationelle Resultate

- Gilt für alle $N \leq 10^{20}$ (`yoyo@home` project, 2017)
- David Bařina (2020): $N \leq 2^{68} \sim 2.95 \cdot 10^{20}$

Statistische Resultate

- I. Krasikov und J. Lagarias (2003)

$$\{N \in \mathbb{N} \cap [1, x];\ \mathrm{Col}_{min}(N) = 1\} \gg x^{0.84}.$$

Belege für die Collatz-Vermutung

Computationelle Resultate

- Gilt für alle $N \leq 10^{20}$ (`yoyo@home` project, 2017)
- David Bařina (2020): $N \leq 2^{68} \sim 2.95 \cdot 10^{20}$

Statistische Resultate

- I. Krasikov und J. Lagarias (2003)

$$\{N \in \mathbb{N} \cap [1, x];\ \mathrm{Col}_{min}(N) = 1\} \gg x^{0.84}.$$

- R. Terras (1976):

$$\mathrm{Col}_{min}(N) < N \qquad \text{für fast alle } N.$$

Belege für die Collatz-Vermutung

Computationelle Resultate

- Gilt für alle $N \leq 10^{20}$ (`yoyo@home` project, 2017)
- David Bařina (2020): $N \leq 2^{68} \sim 2.95 \cdot 10^{20}$

Statistische Resultate

- I. Krasikov und J. Lagarias (2003)

$$\{N \in \mathbb{N} \cap [1, x];\ \mathrm{Col}_{min}(N) = 1\} \gg x^{0.84}.$$

- R. Terras (1976): $(\theta = 1)$

$$\mathrm{Col}_{min}(N) < N^{\theta} \qquad \text{für fast alle } N.$$

- J.-P. Allouche (1979): $\theta = 0.869$.

Belege für die Collatz-Vermutung

Computationelle Resultate

- Gilt für alle $N \leq 10^{20}$ (`yoyo@home` project, 2017)
- David Bařina (2020): $N \leq 2^{68} \sim 2.95 \cdot 10^{20}$

Statistische Resultate

- I. Krasikov und J. Lagarias (2003)

$$\{N \in \mathbb{N} \cap [1, x];\ \mathrm{Col}_{min}(N) = 1\} \gg x^{0.84}.$$

- R. Terras (1976): $(\theta = 1)$

$$\mathrm{Col}_{min}(N) < N^{\theta} \qquad \text{für fast alle } N.$$

- J.-P. Allouche (1979): $\theta = 0.869$.
- I. Korech (1994): $\theta = \frac{\log 3}{2 \log 2} \approx 0.7925$.

„Fast alle“ & Dichtedefinitionen

- Bei den obigen Resultaten ist „für fast alle“ so zu verstehen, dass die Aussage für eine Teilmenge $\mathcal{R} \subset \mathbb{N}$ mit Dichte $d(\mathcal{R}) = 1$ gilt.

„Fast alle“ & Dichtedefinitionen

- Bei den obigen Resultaten ist „für fast alle“ so zu verstehen, dass die Aussage für eine Teilmenge $\mathcal{R} \subset \mathbb{N}$ mit Dichte $d(\mathcal{R}) = 1$ gilt.
- Genauer handelt es sich hierbei umd die *natürliche Dichte* von $\mathcal{R}$, die durch folgenden Grenzwert definiert ist, sofern er existiert

$$d_{nat}(\mathcal{R}) := \lim_{x\to\infty} \frac{\sharp\{N \in \mathcal{R} \cap [1,x]\}}{\sharp\{N \in \mathbb{N} \cap [1,x]\}}.$$

„Fast alle“ & Dichtedefinitionen

- Bei den obigen Resultaten ist „für fast alle“ so zu verstehen, dass die Aussage für eine Teilmenge $\mathcal{R} \subset \mathbb{N}$ mit Dichte $d(\mathcal{R}) = 1$ gilt.
- Genauer handelt es sich hierbei umd die *natürliche Dichte* von $\mathcal{R}$, die durch folgenden Grenzwert definiert ist, sofern er existiert

$$d_{nat}(\mathcal{R}) := \lim_{x\to\infty} \frac{\sharp\{N \in \mathcal{R} \cap [1,x]\}}{\sharp\{N \in \mathbb{N} \cap [1,x]\}}.$$

- Alternativ findet auch die *logarithmische Dichte* Verwendung, die für $\mathcal{R} \subset \mathbb{N}$ definiert ist durch

$$d_{log}(\mathcal{R}) := \lim_{x\to\infty} \frac{\sum_{N\in\mathcal{R}\cap[1,x]} \frac{1}{N}}{\sum_{N\in\mathbb{N}\cap[1,x]} \frac{1}{N}}$$

sofern der Limes exisitiert.

Das Resultat von T. Tao

Theorem

Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *eine Funktion mit* $\lim_{N\to\infty} f(N) = \infty$, *so gilt*

$$\mathrm{Col}_{min}(N) < f(N) \quad \textit{für fast alle } N \in \mathbb{N}.$$

Das Resultat von T. Tao

Theorem

Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *eine Funktion mit* $\lim_{N\to\infty} f(N) = \infty$*, so gilt*

$$\mathrm{Col}_{min}(N) < f(N) \quad \textit{für fast alle } N \in \mathbb{N}.$$

- „Für fast alle" ist hier im Sinne der logarithmischen Dichte d_{log} zu verstehen.
- Man kann in dem Theorem beispielsweise $f = \log(N)$ oder $f = \log\log\log\log(N)$ verwenden.

Das Resultat von T. Tao

Theorem

Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *eine Funktion mit* $\lim_{N\to\infty} f(N) = \infty$*, so gilt*

$$\mathrm{Col}_{min}(N) < f(N) \quad \textit{für fast alle } N \in \mathbb{N}.$$

- „Für fast alle" ist hier im Sinne der logarithmischen Dichte d_{log} zu verstehen.
- Man kann in dem Theorem beispielsweise $f = \log(N)$ oder $f = \log\log\log\log(N)$ verwenden.

Tao betrachtet einen Beschleunigung der Collatz-Folge, die *Syracus-Folge*.

Die Syracus-Folge

Die *Syracus-Abbildung* ist eine Abbildung auf den ungeraden Zahlen, welche durch

$$\mathrm{Syr}(N) := \frac{3N+1}{2^{v_2(3N+1)}} \quad (N \in 2\mathbb{N}-1)$$

definiert ist. Dabei bezeichnet $v_2(m)$ $(m \in \mathbb{N})$ die 2-adische-Bewertung, d.h. $v_2(m) = \max\{r \in \mathbb{N}; 2^r \mid m\}$.

Syracuse University, Quelle: Wikipedia

Die Syracus-Folge

Die *Syracus-Abbildung* ist eine Abbildung auf den ungeraden Zahlen, welche durch

$$\mathrm{Syr}(N) := \frac{3N+1}{2^{v_2(3N+1)}} \quad (N \in 2\mathbb{N} - 1)$$

definiert ist. Dabei bezeichnet $v_2(m)$ $(m \in \mathbb{N})$ die 2-adische-Bewertung, d.h. $v_2(m) = \max\{r \in \mathbb{N}; 2^r \mid m\}$.

Syracuse University, Quelle: Wikipedia

- Beobachtung: $\mathrm{Syr}(N)$ ist immer ungerade und nie durch 3 teilbar.

Die Syracus-Folge

Die *Syracus-Abbildung* ist eine Abbildung auf den ungeraden Zahlen, welche durch

$$\mathrm{Syr}(N) := \frac{3N+1}{2^{v_2(3N+1)}} \quad (N \in 2\mathbb{N} - 1)$$

definiert ist. Dabei bezeichnet $v_2(m)$ $(m \in \mathbb{N})$ die 2-adische-Bewertung, d.h. $v_2(m) = \max\{r \in \mathbb{N}; 2^r \mid m\}$.

Syracuse University, Quelle: Wikipedia

- Beobachtung: $\mathrm{Syr}(N)$ ist immer ungerade und nie durch 3 teilbar.
- Die Iterationen $\mathrm{Syr}^n(N)$ und das Bahn-Minimum $\mathrm{Syr}_{min}(N)$ sind analog wie oben für $\mathrm{Col}(N)$ definiert.

- Für alle $N \in \mathbb{N}$ gilt

$$\mathrm{Col}_{min}(N) = \mathrm{Syr}_{min}(N/2^{v_2(N)}).$$

Daher ist folgende ‘Syracus-Version’ der Collatz Vermutung zu dieser äquivalent.

- Für alle $N \in \mathbb{N}$ gilt

$$\mathrm{Col}_{min}(N) = \mathrm{Syr}_{min}(N/2^{v_2(N)}).$$

Daher ist folgende ‘Syracus-Version’ der Collatz Vermutung zu dieser äquivalent.

Vermutung’

Für alle $N \in 2\mathbb{N} - 1$ gilt $\mathrm{Syr}_{min}(N) = 1$.

- Für alle $N \in \mathbb{N}$ gilt

$$\mathrm{Col}_{min}(N) = \mathrm{Syr}_{min}(N/2^{v_2(N)}).$$

Daher ist folgende ‘Syracus-Version’ der Collatz Vermutung zu dieser äquivalent.

Vermutung’

Für alle $N \in 2\mathbb{N} - 1$ gilt $\mathrm{Syr}_{min}(N) = 1$.

Die entsprechende Version des Theorems von Tao lautet nun.

Theorem’

Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $\lim_{N\to\infty} f(N) = \infty$, so gilt

$$\mathrm{Syr}_{min}(N) < f(N) \quad \text{für fast alle } N \in 2\mathbb{N} - 1$$

(im Sinne der log. Dichte d_{log}).

Eigenschaften von $\mathrm{Syr}^n(N)$

- Für $x \in \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{N}$ definiere man $\mathrm{Aff}_a(x) := \frac{3x+1}{2^a}$,

Eigenschaften von $\mathrm{Syr}^n(N)$

- Für $x \in \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{N}$ definiere man $\mathrm{Aff}_a(x) := \frac{3x+1}{2^a}$, und

  $\mathrm{Aff}_{\vec{a}}(x) := \mathrm{Aff}_{a_n}(\ldots \mathrm{Aff}_{a_2}(\mathrm{Aff}_{a_1}(x)) \ldots)$ für $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{N}^n$

Eigenschaften von $\mathrm{Syr}^n(N)$

- Für $x \in \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{N}$ definiere man $\mathrm{Aff}_a(x) := \frac{3x+1}{2^a}$, und

$$\mathrm{Aff}_{\vec{a}}(x) := \mathrm{Aff}_{a_n}(\dots \mathrm{Aff}_{a_2}(\mathrm{Aff}_{a_1}(x)) \dots) \quad \text{für } \vec{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{N}^n$$

- Definiere die *n-Syracus-Bewertung* $\vec{a}^{(n)}(N) \in \mathbb{N}^n$ durch

$$\vec{a}^{(n)}(N) := (v_2(3N+1), v_2(3\mathrm{Syr}(N)+1), \dots v_2(3\mathrm{Syr}^{n-1}(N)+1)).$$

Eigenschaften von $\mathrm{Syr}^n(N)$

- Für $x \in \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{N}$ definiere man $\mathrm{Aff}_a(x) := \frac{3x+1}{2^a}$, und

  $\mathrm{Aff}_{\vec{a}}(x) := \mathrm{Aff}_{a_n}(\ldots \mathrm{Aff}_{a_2}(\mathrm{Aff}_{a_1}(x))\ldots)$ für $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{N}^n$

- Definiere die *n-Syracus-Bewertung* $\vec{a}^{(n)}(N) \in \mathbb{N}^n$ durch

  $$\vec{a}^{(n)}(N) := (v_2(3N+1), v_2(3\mathrm{Syr}(N)+1), \ldots v_2(3\mathrm{Syr}^{n-1}(N)+1)).$$

- Dann gilt $\mathrm{Syr}^n(N) = \mathrm{Aff}_{\vec{a}^{(n)}(N)}(N) = 3^n 2^{\left|\vec{a}^{(n)}(N)\right|} + F_n\left(\vec{a}^{(n)}(N)\right)$, wobei $|\vec{a}| := a_{[1,n]} = a_1 + \ldots + a_n$ und

Eigenschaften von $\mathrm{Syr}^n(N)$

- Für $x \in \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{N}$ definiere man $\mathrm{Aff}_a(x) := \frac{3x+1}{2^a}$, und

  $\mathrm{Aff}_{\vec{a}}(x) := \mathrm{Aff}_{a_n}(\ldots \mathrm{Aff}_{a_2}(\mathrm{Aff}_{a_1}(x)) \ldots)$ für $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{N}^n$

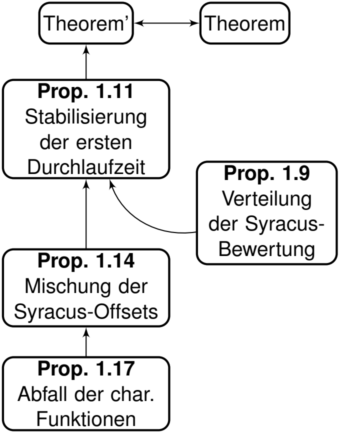
- Definiere die *n-Syracus-Bewertung* $\vec{a}^{(n)}(N) \in \mathbb{N}^n$ durch

  $$\vec{a}^{(n)}(N) := (v_2(3N+1), v_2(3\mathrm{Syr}(N)+1), \ldots v_2(3\mathrm{Syr}^{n-1}(N)+1)).$$

- Dann gilt $\mathrm{Syr}^n(N) = \mathrm{Aff}_{\vec{a}^{(n)}(N)}(N) = 3^n 2^{\left|\vec{a}^{(n)}(N)\right|} + F_n\left(\vec{a}^{(n)}(N)\right)$, wobei $|\vec{a}| := a_{[1,n]} = a_1 + \ldots + a_n$ und die sog. *n-Offset-Abbildung* $F_n : \mathbb{N}^n \to \mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\right]$ gegeben ist durch (worin $a_{[j,k]} := \sum_{i=j}^k a_i$)

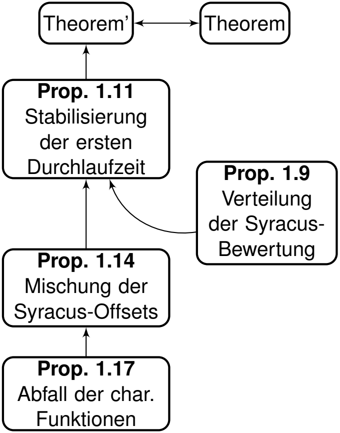
  $$F_n(\vec{a}) = 3^{n-1} 2^{-a_{[1,n]}} + 3^{n-2} 2^{-a_{[2,n]}} + \cdots + 3 \cdot 2^{-a_{[n-1,n]}} + 2^{-a_n}.$$

Die Struktur von Tao's Beweis



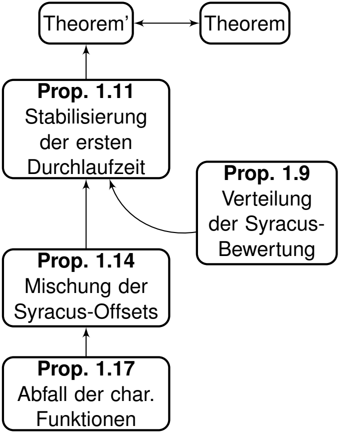
- In Prop. 1.9 wird der 2-adische Bewertungsvektor $a^{(n)}(N)$ untersucht. (Erlaubt Abschätzungen des Typs $\mathrm{Syr}_{min}(N) \leq N^{1-c}$.)

Die Struktur von Tao's Beweis



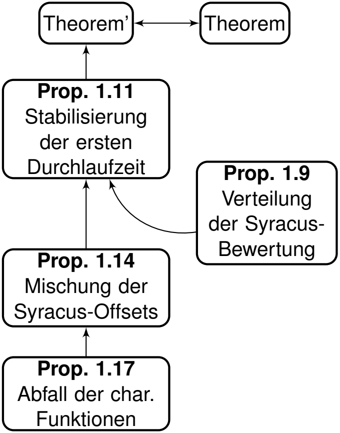
- In Prop. 1.9 wird der 2-adische Bewertungsvektor $a^{(n)}(N)$ untersucht. (Erlaubt Abschätzungen des Typs $\mathrm{Syr}_{min}(N) \leq N^{1-c}$.)
- In Prop. 1.14 studiert Tao die Verteilung von Syr^n modulo 3^n genau.

Die Struktur von Tao's Beweis



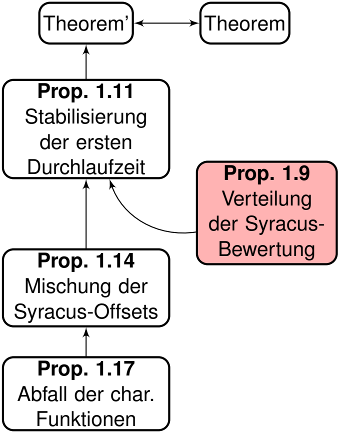
- In Prop. 1.9 wird der 2-adische Bewertungsvektor $a^{(n)}(N)$ untersucht. (Erlaubt Abschätzungen des Typs $\mathrm{Syr}_{min}(N) \leq N^{1-c}$.)
- In Prop. 1.14 studiert Tao die Verteilung von Syr^n modulo 3^n genau.
- Er konstruiert eine Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen, sodass das Maß μ_x auf $[1, x]$ durch Syr auf das Maß $\mu_{x^{1-c}}$ auf $[1, x^{1-c}]$ abgebildet wird (s. Prop. 1.11).

Die Struktur von Tao's Beweis



- In Prop. 1.9 wird der 2-adische Bewertungsvektor $a^{(n)}(N)$ untersucht. (Erlaubt Abschätzungen des Typs $\mathrm{Syr}_{min}(N) \leq N^{1-c}$.)
- In Prop. 1.14 studiert Tao die Verteilung von Syr^n modulo 3^n genau.
- Er konstruiert eine Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen, sodass das Maß μ_x auf $[1, x]$ durch Syr auf das Maß $\mu_{x^{1-c}}$ auf $[1, x^{1-c}]$ abgebildet wird (s. Prop. 1.11).
- Inspiration hierfür: Eine Arbeit von Bougain über nicht-lineare Schrödinger-Differentialgleichungen.

Proposition 1.9



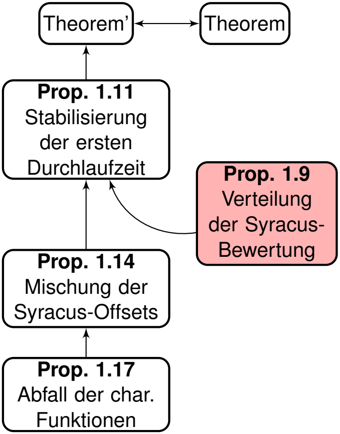
zu Proposition 1.9

- Bezeichne mit $\mathbf{Geom}(\mu)$ $(\mu > 1)$ eine geometrisch verteilte Zufallsgröße mit Mittelwert μ, d.h. für alle $a \in \mathbb{N}$ ist

$$\mathbb{P}(\mathbf{Geom}(\mu) = a) = \frac{1}{\mu}\left(\frac{\mu - 1}{\mu}\right)^{a-1}$$

  und mit $\mathbf{Geom}(\mu)^k$ k ein k-Tupel von unabhängig, identisch verteilten Kopien von $\mathbf{Geom}(\mu)$.
- Weiter bezeichne $\mathbf{Unif}(R)$ eine gleichmäßig verteilte Zufallsgröße mit Werten in R (mit $R \neq \emptyset$, $\sharp R < \infty$).

Proposition 1.9



Proposition 1.9

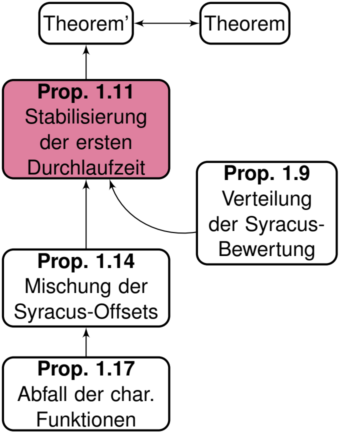
- Sei $n \in \mathbb{N}$, sei $\mathbf{N}$ eine Zufallsgröße mit Werten in $2\mathbb{Z} - 1$.
- Angenommen, es gibt. eine Konstante $c_0 > 0$ und ein $m \in \mathbb{N}$, mit $m \geq (2 + c_0)n$, so dass

$$d_{TV}\left(\mathbf{N} \bmod 2^m, \mathbf{Unif}(2\mathbb{Z}/2^m\mathbb{Z} + 1)\right) \ll 2^{-m}.$$

- Dann ist $d_{TV}\left(\vec{a}^{(n)}(\mathbf{N}), \mathbf{Geom}(2)^n\right) \ll 2^{-c_1 n}$

Hier ist $d_{TV}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ für zwei Zufallsgrößen $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ gegeben durch $\sum_{r \in R} |\mathbb{P}(\mathbf{X} = r) - \mathbb{P}(\mathbf{Y} = r)|$

Proposition 1.11

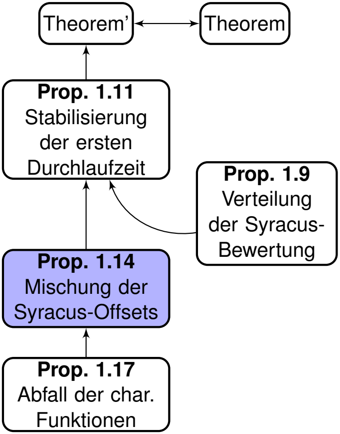


zu Proposition 1.11

- Setze $T_x(N) := \inf_{n\in\mathbb{N}}\{\mathrm{Syr}^n(N) \leq x\}$ und $T_x(N) = +\infty$ falls $\mathrm{Syr}^n(N) > x$ $\forall n$, und $\mathrm{Pass}_x(N) := \mathrm{Syr}^{T_x(N)}(N)$.
- Sei $\alpha > 1$ (und nahe bei 1) und für jedes $y \gg 1$ sei $\mathbf{N}_y$ eine Zufallsgröße mit Verteilung $\mathbf{Log}(2\mathbb{N} - 1 \cap [y, y^\alpha])$.
- Dann gelten für genügend große x die Abschätzungen $\mathbb{P}(T_x(\mathbf{N}_x) = +\infty) \ll x^{-c}$, $\mathbb{P}(T_x(\mathbf{N}_{x^2}) = +\infty) \ll x^{-c}$ und

$$d_{TV}(\mathrm{Pass}_x(\mathbf{N}_{x^\alpha}), \mathrm{Pass}_x(\mathbf{N}_{x^{\alpha^2}})) \ll \log^{-c} x \quad \text{mit } c > 0 \text{ konst.}$$

Proposition 1.14



- Definiere die *Syracus Zufallsgröße* mit Werten in $(\mathbb{Z}/3^n\mathbb{Z})^\times$ durch die Verteilung

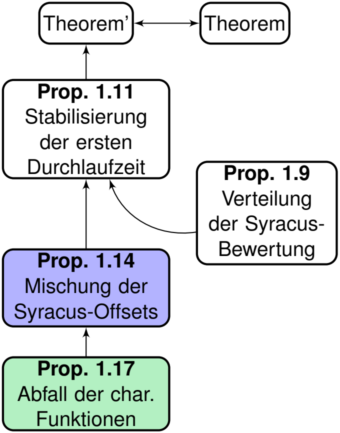
$$\mathbf{Syc}(\mathbb{Z}/3^n\mathbb{Z}) \cong F_n\left(\mathbf{Geom}(2)^n\right)(3^n)$$

- Für ein Tupel $(c_Y)_{Y\in\mathbb{Z}/3^n\mathbb{Z}}$ reeller Zahlen definiere $\mathrm{Osc}_{m,n}(c_Y)_{Y\in\mathbb{Z}/3^n\mathbb{Z}}$ ($c_Y \in \mathbb{R}$) als

$$\sum_{Y\in\mathbb{Z}/3^n\mathbb{Z}} \left| c_Y - 3^{m-n} \sum_{Y,Y'\equiv Y(3^n)} c_{Y'} \right|$$

„Oszillation zur Skala 3^{-m}"

Proposition 1.14 und Proposition 1.17



Proposition 1.14

Für alle $1 \leq m \leq n$ hat man

$$\mathrm{Osc}_{m,n}(\mathbb{P}(\mathbf{Syc}(\mathbb{Z}/3^n\mathbb{Z})) = Y(3^n)))_{Y \in \mathbb{Z}/3^n\mathbb{Z}} \ll_A m^{-A}.$$

für jedes feste $A > 0$.

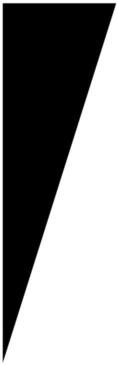
Proposition 1.17

Sei $n \geq 1$ und sei $\xi \in (\mathbb{Z}/3^n\mathbb{Z})^\times$. Dann gilt

$$\mathbb{E} \exp(2\pi i \xi \mathbf{Syc}(\mathbb{Z}/3^n\mathbb{Z})/3^n) \ll_A n^{-A}.$$

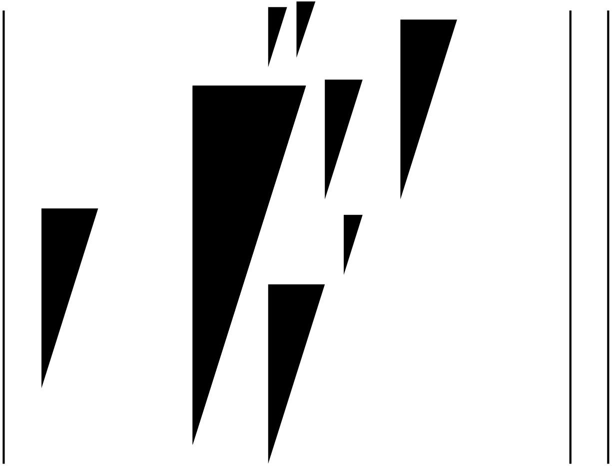
für jedes feste $A > 0$.

Schwarze und Weiße Punkte



Schwarze und Weiße Punkte

Schwarze und Weiße Punkte

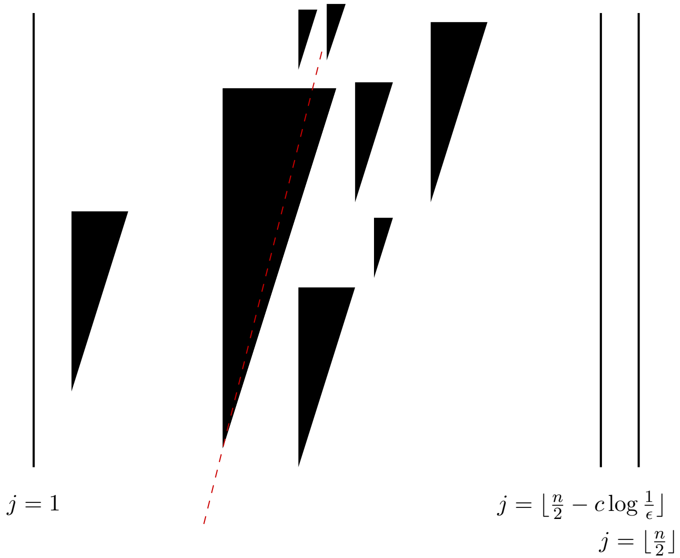


$j = 1$

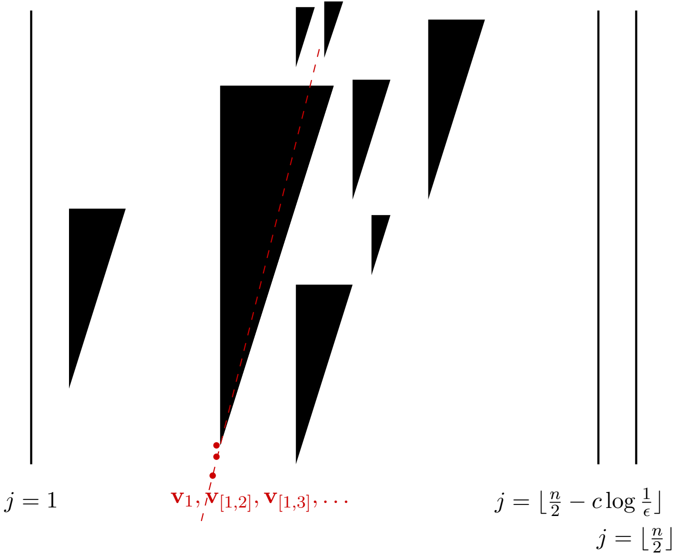
$j = \lfloor \frac{n}{2} - c \log \frac{1}{\epsilon} \rfloor$

$j = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$

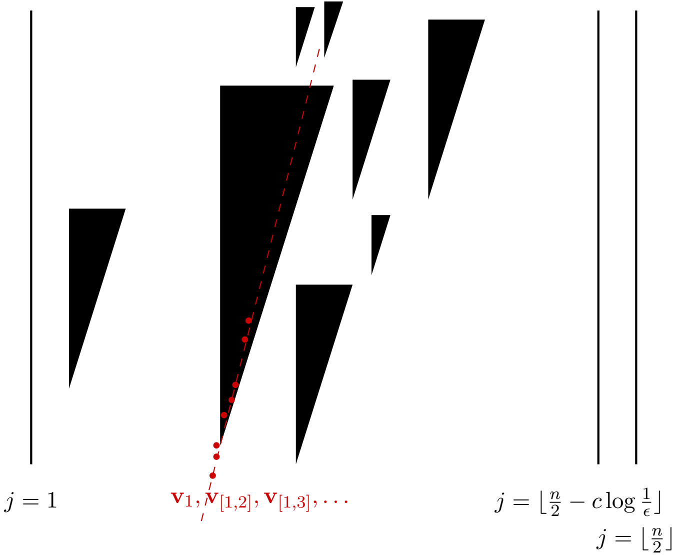
Schwarze und Weiße Punkte



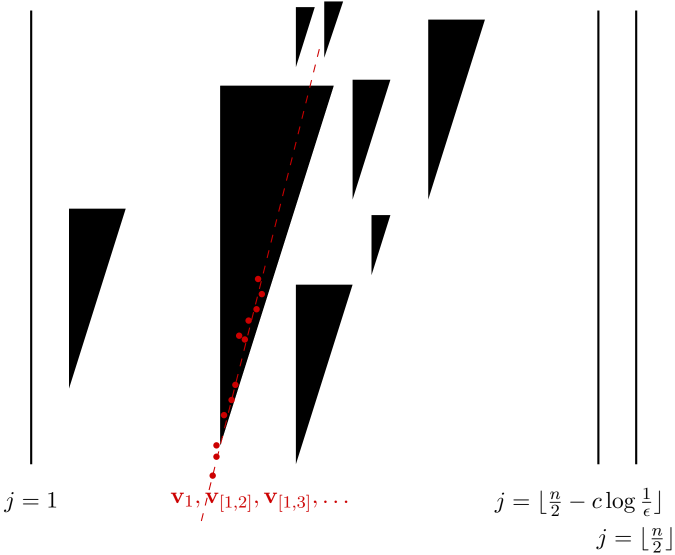
Schwarze und Weiße Punkte



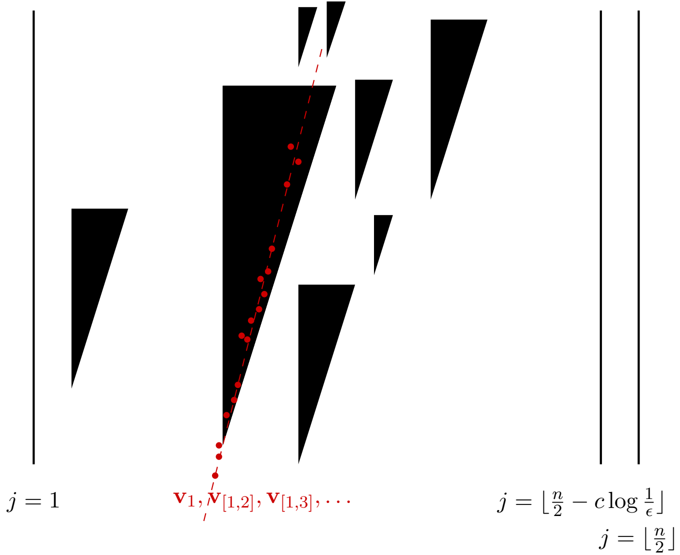
Schwarze und Weiße Punkte



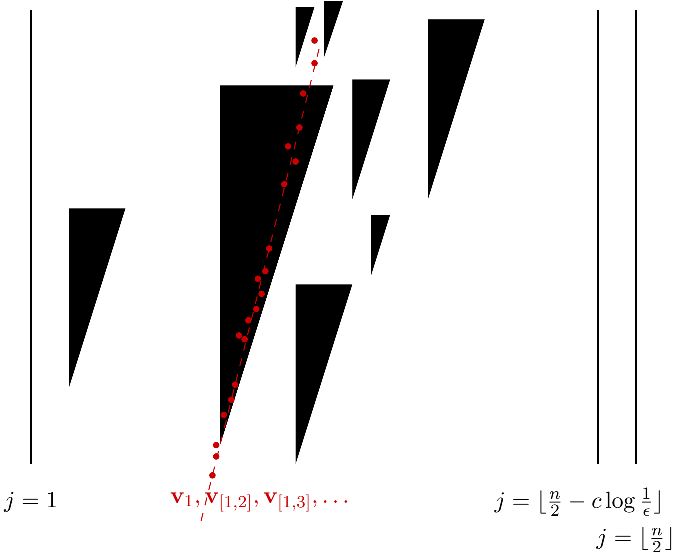
Schwarze und Weiße Punkte



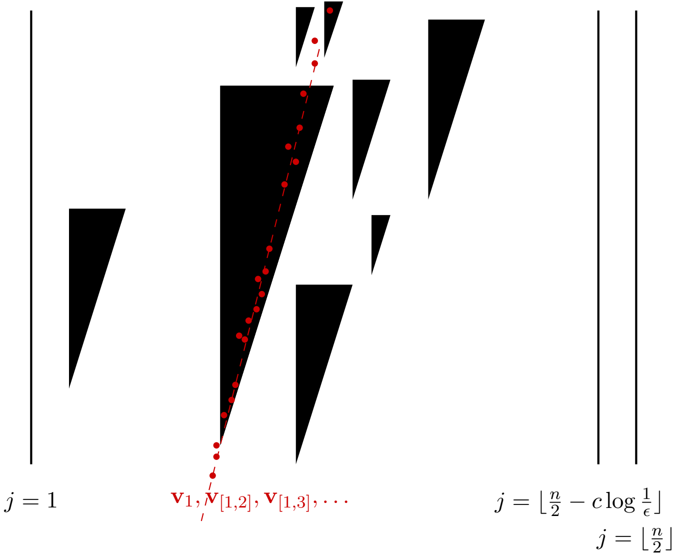
Schwarze und Weiße Punkte



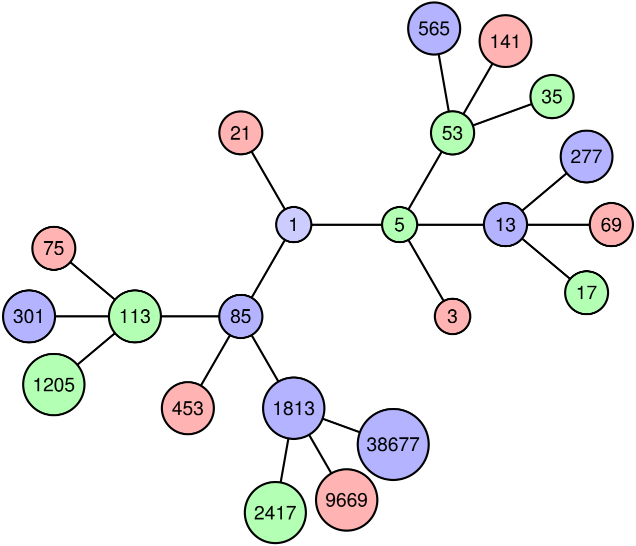
Schwarze und Weiße Punkte



Schwarze und Weiße Punkte



Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!



ANHANG: Abwandlungen des $3N+1$ Problems.

Das $3N - 1$-Problem

- Ganz analog zur Collatz-Abbildung definiere man

$$\widetilde{\mathrm{Col}}(N) := \begin{cases} 3N - 1 & N \equiv 1 \pmod 2 \\ \frac{N}{2} & N \equiv 0 \pmod 2 \end{cases}$$

Das $3N-1$-Problem

- Ganz analog zur Collatz-Abbildung definiere man

$$\widetilde{\mathrm{Col}}(N) := \begin{cases} 3N-1 & N \equiv 1 \pmod 2 \\ \frac{N}{2} & N \equiv 0 \pmod 2 \end{cases}$$

- Grundsätzlich sollte man für $\widetilde{\mathrm{Col}}^n(N)$ ein ähnliches Verhalten erwarten, beispielsweise aufgrund der oben eingeführten Heuristik.

Das $3N-1$-Problem

- Ganz analog zur Collatz-Abbildung definiere man

$$\widetilde{\mathrm{Col}}(N) := \begin{cases} 3N-1 & N \equiv 1 \pmod 2 \\ \frac{N}{2} & N \equiv 0 \pmod 2 \end{cases}$$

- Grundsätzlich sollte man für $\widetilde{\mathrm{Col}}^n(N)$ ein ähnliches Verhalten erwarten, beispielsweise aufgrund der oben eingeführten Heuristik.
- Allerdings findet man drei Perioden:

Das $3N - 1$-Problem

- Ganz analog zur Collatz-Abbildung definiere man

$$\widetilde{\mathrm{Col}}(N) := \begin{cases} 3N - 1 & N \equiv 1 \pmod 2 \\ \frac{N}{2} & N \equiv 0 \pmod 2 \end{cases}$$

- Grundsätzlich sollte man für $\widetilde{\mathrm{Col}}^n(N)$ ein ähnliches Verhalten erwarten, beispielsweise aufgrund der oben eingeführten Heuristik.
- Allerdings findet man drei Perioden:
  1. $1, 2, 1, 2, \ldots$

Das $3N-1$-Problem

- Ganz analog zur Collatz-Abbildung definiere man

$$\widetilde{\mathrm{Col}}(N) := \begin{cases} 3N-1 & N \equiv 1 \pmod 2 \\ \frac{N}{2} & N \equiv 0 \pmod 2 \end{cases}$$

- Grundsätzlich sollte man für $\widetilde{\mathrm{Col}}^n(N)$ ein ähnliches Verhalten erwarten, beispielsweise aufgrund der oben eingeführten Heuristik.
- Allerdings findet man drei Perioden:
  1. $1, 2, 1, 2, \ldots$
  2. $5, 14, 7, 20, 10, 5, \ldots$

Das $3N-1$-Problem

- Ganz analog zur Collatz-Abbildung definiere man

$$\widetilde{\mathrm{Col}}(N) := \begin{cases} 3N-1 & N \equiv 1 \pmod 2 \\ \frac{N}{2} & N \equiv 0 \pmod 2 \end{cases}$$

- Grundsätzlich sollte man für $\widetilde{\mathrm{Col}}^n(N)$ ein ähnliches Verhalten erwarten, beispielsweise aufgrund der oben eingeführten Heuristik.
- Allerdings findet man drei Perioden:
  1. $1, 2, 1, 2, \ldots$
  2. $5, 14, 7, 20, 10, 5, \ldots$
  3. $17, 50, 25, 74, 37, 110, 55, 164, 82, 41, 122, 61, 182, 91, 272, 136, 68, 34, 17, \ldots$

Das $3N - 1$-Problem

- Ganz analog zur Collatz-Abbildung definiere man

$$\widetilde{\mathrm{Col}}(N) := \begin{cases} 3N-1 & N \equiv 1 \pmod 2 \\ \frac{N}{2} & N \equiv 0 \pmod 2 \end{cases}$$

- Grundsätzlich sollte man für $\widetilde{\mathrm{Col}}^n(N)$ ein ähnliches Verhalten erwarten, beispielsweise aufgrund der oben eingeführten Heuristik.
- Allerdings findet man drei Perioden:
  1. $1, 2, 1, 2, \ldots$
  2. $5, 14, 7, 20, 10, 5, \ldots$
  3. $17, 50, 25, 74, 37, 110, 55, 164, 82, 41, 122,$ $61, 182, 91, 272, 136, 68, 34, 17, \ldots$
- Die analoge Vermutung (ebenfalls unbewiesen) lautet nun, dass dies alle Perioden sind und alle Bahnen in diese münden.

Divergente Folgen?

- Etwas anders verhält es sich mit der Abbildung

$$T_5(N) := \begin{cases} \frac{5N+1}{2} & N \equiv 1 \pmod 2 \\ \frac{N}{2} & N \equiv 0 \pmod 2. \end{cases}$$

Divergente Folgen?

- Etwas anders verhält es sich mit der Abbildung

$$T_5(N) := \begin{cases} \frac{5N+1}{2} & N \equiv 1 \pmod 2 \\ \frac{N}{2} & N \equiv 0 \pmod 2). \end{cases}$$

- Modelliert man analog zur obigen Heurisitk die Folge $\log\left(T_5^n(N)\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ als Random Walk, mit Schrittlängen $\log\frac{5}{2}$ und $\log\frac{1}{2}$, jeweils mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$, so erhält als Erwartungswert für die Schrittlänge

$$\frac{1}{2}\log\frac{5}{2} + \frac{1}{2}\log\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\log\frac{5}{4} > 1.$$

Die Folge sollte also 'fast sicher' divergieren.

Divergente Folgen?

- Etwas anders verhält es sich mit der Abbildung

$$T_5(N) := \begin{cases} \frac{5N+1}{2} & N \equiv 1 \pmod 2 \\ \frac{N}{2} & N \equiv 0 \pmod 2). \end{cases}$$

- Modelliert man analog zur obigen Heurisitk die Folge $\log\left(T_5^n(N)\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ als Random Walk, mit Schrittlängen $\log\frac{5}{2}$ und $\log\frac{1}{2}$, jeweils mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$, so erhält als Erwartungswert für die Schrittlänge

$$\frac{1}{2}\log\frac{5}{2} + \frac{1}{2}\log\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\log\frac{5}{4} > 1.$$

  Die Folge sollte also 'fast sicher' divergieren.
- Dies steht im Einklang mit computationellen Ergebnissen.

- Zunächst erhält man für die Startwerte $N = 1, \ldots, 6$ periodischen Folgen.

- Zunächst erhält man für die Startwerte $N = 1, \ldots, 6$ periodischen Folgen.
- Für $N = 7$ zeigt sich jedoch die erwartete Divergenz. Die ersten 50 Iterationen ergeben
$7, 18, 9, 23, 58, 29, 73, 183, 458, 229, 573, 1433, 3583, 8958, 4479, 11198, 5599, 13998, 6999, 17498, 8749, 21873, 54683, 136708, 68354, 34177, 85443, 213608, 106804, 53402, 26701, 66753, 166883, 417208, 208604, 104302, 52151, 130378, 65189, 162973, 407433, 1018583, 2546458, 1273229, 3183073, 7957683, 19894208, 9947104, 4973552, 2486776, 1243388$

- Zunächst erhält man für die Startwerte $N = 1, \ldots, 6$ periodischen Folgen.
- Für $N = 7$ zeigt sich jedoch die erwartete Divergenz. Die ersten 50 Iterationen ergeben
  $7, 18, 9, 23, 58, 29, 73, 183, 458, 229, 573, 1433, 3583, 8958, 4479, 11198, 5599, 13998, 6999, 17498, 8749, 21873, 54683, 136708, 68354, 34177, 85443, 213608, 106804, 53402, 26701, 66753, 166883, 417208, 208604, 104302, 52151, 130378, 65189, 162973, 407433, 1018583, 2546458, 1273229, 3183073, 7957683, 19894208, 9947104, 4973552, 2486776, 1243388$
- Nach 10 0000 Iterationen hat man Zahlen der Größenordnung 10^{318} erreicht, nach 20 000 Iterationen schon 10^{645}.

- Zunächst erhält man für die Startwerte $N = 1, \ldots, 6$ periodischen Folgen.
- Für $N = 7$ zeigt sich jedoch die erwartete Divergenz. Die ersten 50 Iterationen ergeben
  $7, 18, 9, 23, 58, 29, 73, 183, 458, 229, 573, 1433, 3583, 8958, 4479, 11198, 5599, 13998, 6999, 17498, 8749, 21873, 54683, 136708, 68354, 34177, 85443, 213608, 106804, 53402, 26701, 66753, 166883, 417208, 208604, 104302, 52151, 130378, 65189, 162973, 407433, 1018583, 2546458, 1273229, 3183073, 7957683, 19894208, 9947104, 4973552, 2486776, 1243388$
- Nach 10 0000 Iterationen hat man Zahlen der Größenordnung 10^{318} erreicht, nach 20 000 Iterationen schon 10^{645}.

Für die analoge Abbildung $T_7(N)$ divergiert bereits zu $N = 3$ die Folge sehr rasch. (Größenordnung nach 10 000 Iterationen ca. 10^{840}).